壹、111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽數學科決賽-實施計畫

一、依據：教育部國民及學前教育署 111 年 7 月 19 日臺教授國字第 1110093040 號函辦理。

二、宗旨：加強輔導公私立普通型高級中等學校推動數學、自然學科及資訊教育，以提高學生對基礎科學及資訊研究之興趣，並藉以鼓勵學生與校際間相互觀摩，提昇科學教育品質。

三、參加對象：各公、私立高級中等學校各年級在學之普通科及修習綜合高中學程之一年級與二、三年級學術學程之學生，由教育部國民及學前教育署、台北市、新北市、台中市及高雄市政府教育局辦理之複賽中選拔優勝學生代表參加決賽，其名額分別如下：國教署負責區 22 人、臺北區 12 人、新北區 8 人、中投區 7 人、高雄市 5 人，總計 54 人。

四、主辦單位：教育部國民及學前教育署

五、承辦單位：國立高雄師範大學數學系

六、舉辦日期：111 年 12 月 16 日（星期五）至 111 年 12 月 17 日（星期六）

七、舉辦地點：國立高雄師範大學燕巢校區（高雄市燕巢區深中路 62 號）

八、報名方式及日期：由教育部國民及學前教育署、台北市、新北市、台中市及高雄市政府教育局繕造報名表，於 111 年 11 月 25 日前送達教育部國民及學前教育署與國立高雄師範大學數學系。

九、競賽方式及內容：

（一）競賽賽程：如附表。

（二）競賽方式：

1．筆試：四小時【筆試（一）及筆試（二）各兩小時，請自備圓規直尺等作答文具，但不得使用計算器及圖表】。

2．口試：六小時【就筆試（一）（二）成績前 22 至 25 名為原則參加口試，分組實施】。

3．獨立研究：4 小時（分組實施）。

4．成果評鑑：2 小時（分組實施）。

5．文康活動：2 小時。

（三）競賽命題範圍及方式：以普通型高級中等學校數學課教材範圍為原則，筆試部分並模擬國際數學奧林匹亞方式命題，以評測參賽者潛能。

十、評審：

（一）評審委員：由主辦單位聘請專家學者 15 人組成命題及評審委員會，凡參與教育部國民及學前教育署「110 學年度高中學生科學研究人才培育計畫」之老師，如有指導學生參與決賽，於口試階段應迴避擔任評審委員。

（二）競賽評分方式：由命題及評審委員會決定並於賽前公布。

十一、獎勵：

（一）凡參加者均由教育部國民及學前教育署發給參賽證明。

（二）優勝者由教育部國民及學前教育署發給獎狀及獎學金，獎學金給獎標準如下：

獎 別	人數	獎學金數額 (每人)	備　　註
第一等獎	3 人	壹萬伍仟元	(一)本項獎學金以學生為發給對象。 (二)在不超過獎學金總金額前提下，得由評審委員會視競賽成績酌予調整得獎人數（或從缺）。
第二等獎	7 人	壹　萬　元	
第三等獎	10 人	柒仟伍佰元	

（三）獲得前三等獎學生之指導教師由教育部國民及學前教育署發給獎狀，由各主管教育行政機關酌予敘獎。

（四）獲得前三等獎及表現優異之學生，得由主辦單位推薦參加國際數學及亞太數學奧林匹亞研習營或資優營。

十二、工作小組

計畫主持人： 李俊憲 教　授（國立高雄師範大學數學系主任）

兼任行政助理： 林治宏 助理員（國立高雄師範大學數學系）

張文齡 業務專員（國立高雄師範大學數學系）

簡珮臻 行政助理（國立高雄師範大學數學系）

十三、工作進度表

111 年 08 月 30 日：成立籌備小組，並召開第一次小組籌備會議，建議評審名單

111 年 08 月 31 日：提出計畫、申請經費

111 年 10 月 04 日：成立命題及評審委員會，開始命題

111 年 11 月 18 日：完成架構本競賽入口網站

111 年 11 月 24 日：召開第二次小組籌備會議，確認競賽活動賽程及人員工作分配

111 年 11 月 25 日：參賽學生報名截止

111 年 11 月 28 日：寄發評審委員行程表及會議通知單(含住宿調查表)

111 年 11 月 30 日：完成命題工作，並蒐集各區複賽試題及解答

111 年 12 月 01 日：完成預選試題之審題分析及分類：代數、數論、組合、幾何

111 年 12 月 02 日：召開第三次擴大籌備會議(含試務協調會議及兩場評審選題會議)

111 年 12 月 05 日：寄發公文、邀請函、競賽活動賽程及生活須知等給參賽學生

111 年 12 月 06 日：寄發貴賓及指導老師邀請函，邀請參加閉幕典禮及頒獎

111 年 12 月 09 日：完成學生膳宿、交通、平安保險及競賽期間之茶點安排

111 年 12 月 12 日：召開工作人員行前會議

111 年 12 月 13 日：決賽手冊編印完成、獎狀與參加證書之印製等

111 年 12 月 15 日：完成會場佈置

111 年 12 月 16~17 日：競賽活動 (如附表)

112 年 01 月 16 日：完成成果報告編印及寄送

112 年 02 月 10 日：完成經費結報－結案

十四、本項競賽應兼顧教育與競賽功能，決賽除競賽活動，並得由承辦單位安排專題演講、討論、文康等活動。賽程活動如需變動，得由承辦單位於賽前公告。競賽期間如因疫情因素，所有餐與活動的人員得依防疫指揮中心規定，保持社交距離並全程戴上口罩，必要時得造冊專案申請為全體參賽學生、評審及工作人員做 PCR 快篩檢測或注射新冠疫苗。

十五、經費：本計畫由教育部國民及學前教育署核定補助。

貳、競賽程序表

一、競賽日期: 111 年 12 月 16 日(五)至 111 年 12 月 17 日(六)
二、競賽地點:國立高雄師範大學 燕巢校區 (地址:高雄市燕巢區深中路 62 號)
三、競賽程序表

<table>
<tr><th colspan="2">12 月 16 日 (星期五)</th><th colspan="3">12 月 17 日 (星期六)</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">11:00~11:40
報 到
數學系
燕巢校區致理大樓
MA803</td><td colspan="3">6:15 ~ 7:10 早 餐</td></tr>
<tr><td>8:30~10:10
口試(分三組)
MA616 (A)
MA618 (B)
MA620 (C)</td><td>口試預備室
MA613

獨立研究(續)
MA716</td><td>8:30~10:00
獨立研究(一)
MA804</td></tr>
<tr><td colspan="2">11:40~12:30
開幕典禮
(競賽活動及規則說明)
燕巢校區致理大樓
MA803</td><td colspan="3">茶 點 時 間</td></tr>
<tr><td colspan="2">12:30~13:20 午 餐</td><td>10:30~11:50
口試(分三組)
MA616 (A)
MA618 (B)
MA620 (C)</td><td>10:00~12:00
閱 卷
MA615</td><td>10:20~11:50
獨立研究(二)
MA804</td></tr>
<tr><td colspan="2">13:30~15:30
筆試(一)
MA616
MA618</td><td>14:30~15:30
閱卷委員
訂定評分標準
M615</td><td colspan="3">12:00~13:00 午 餐</td></tr>
<tr><td colspan="2">茶 點 時 間</td><td>13:00~14:20
口試(分三組)
MA616 (A)
MA618 (B)
MA620 (C)</td><td>13:00~15:00
閱 卷
MA615</td><td>13:00~14:20
文康活動
MA804</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">16:00~18:00
筆試(二)
MA616
MA618</td><td rowspan="3">15:30~18:30
閱 卷
MA615</td><td colspan="3">茶 點 時 間</td></tr>
<tr><td colspan="2">15:00~15:20
口試成績評審
MA615</td><td>14:30~15:20
成果評鑑(一)
MA804</td></tr>
<tr><td colspan="2">15:20~16:00
成績審查會議(二) MA615
(印製得獎獎狀)</td><td>15:30~16:20
成果評鑑(二)
MA804
(團體合照)</td></tr>
<tr><td colspan="2">18:00~19:00 晚 餐</td><td colspan="3">16:30~18:00 閉幕典禮
(頒 獎) MA803</td></tr>
<tr><td>19:00~20:50
文康聯誼
(營務分配)
MA804</td><td>19:00~20:30
成績審查會議
(一)
20:30~22:00
試務會議(口試)
(閱卷) MA615</td><td colspan="3">18:00~19:00 晚 餐</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">快 樂 賦 歸 (專 車)</td></tr>
</table>

參、參賽學生及指導老師名冊

肆、計畫主持人、評審委員、輔導員及工作人員名單

一、計畫主持人：

李俊憲	(國立高雄師範大學數學系教授兼系主任)

二、評審委員(依姓氏筆畫順序排列)：

左太政	(國立高雄師範大學數學系教授)
杜子明	(國立彰化師範大學數學系副教授)
杜威仕	(國立高雄師範大學數學系教授)
何忠益	(國立高雄師範大學數學系副教授)
林延輯	(國立台灣師範大學數學系副教授)
林盈甄	(國立高雄師範大學數學系教授)
陳界山	(國立台灣師範大學數學系教授)
陳振遠	(國立高雄師範大學數學系教授)
郭君逸	(國立台灣師範大學數學系副教授)
黃必祥	(國立高雄師範大學數學系教授)
游森棚	(國立台灣師範大學數學系教授)
葉均承	(國立高雄師範大學數學系助理教授)
廖本煌	(國立高雄師範大學數學系教授)
賴欣豪	(國立高雄師範大學數學系副教授)
蕭守仁	(國立彰化師範大學數學系教授)

二、輔導員：

張祐瑋	(國立高雄師範大學數學系學生)
黃鉦文	(國立高雄師範大學數學系學生)
廖紫雲	(國立高雄師範大學數學系學生)
李其庭	(國立高雄師範大學數學系學生)
羅允澤	(國立高雄師範大學數學系學生)
高新雄	(國立高雄師範大學數學系學生)

三、工作人員：

林治宏	(國立高雄師範大學數學系助理員)
張文齡	(國立高雄師範大學數學系業務專員)
簡珮臻	(國立高雄師範大學數學系行政助理)
陳諭賢	(國立高雄師範大學數學系學生)
李家緯	(國立高雄師範大學數學系學生)
尹姿涵	(國立高雄師範大學數學系學生)
黃馨儀	(國立高雄師範大學數學系學生)
周富景	(國立高雄師範大學數學系學生)

伍、競賽成績統計分析

教育部為加強輔導公私立普通型高級中等學校推動數學、自然學科及資訊教育，以提高學生對基礎科學及資訊研究之興趣，每年皆舉辦全國性數理及資訊學科能力競賽，計有數學、物理、化學、生物、資訊及地球科學等 6 科，並藉以鼓勵學生與校際間相互觀摩，提昇科學教育品質。

在數學教育方面，為提高中學生對數學方面高度的學習興趣，激發中學生的獨立思考能力，藉以鼓勵中學生與校際間互相觀摩，提升數學教育品質，特舉辦此一能力競賽之數學科決賽。本決賽今年由國立高雄師範大學數學系承辦，由來自全國各公、私立高級中學榮獲教育部國民及學前教育署、台北市、新北市、台中市及高雄市政府教育局辦理之複賽中選拔脫穎而出的優勝學生，代表參加此一決賽（名額如下：國教署負責區 22 人、臺北區 12 人、新北區 8 人、中投區 7 人、高雄區 5 人），除其中 5 位學生因故未克參加外，共計 49 名數學菁英學生齊聚一堂參加為期二天的競賽。

本決賽活動由該系系主任李俊憲教授擔任計畫主持人，自 111 年 12 月 16 日至 111 年 12 月 17 日假該校燕巢校區致理大樓 6 至 8 樓數學系舉行，其競賽項目包括筆試、口試及獨立研究等項目，而成績的評分則是依據筆試(一)佔 35%、筆試(二)佔 35%、口試佔 30%的總分來評定名次；另本次競賽獨立研究(一)及獨立研究(二)的成績雖不計入總成績，但為評審委員評比之參考，俾以推薦參加亞太數學奧林匹亞研習營及數學資優營之依據。

此競賽活動亦是我國選拔亞太數學奧林匹亞研習營（APMO）及其資優營（GMO）代表隊的重要參考，對獲得前三等獎、口試及筆試暨獨立研究等項目表現優異學生得由主辦單位推薦參加該等選拔培訓營，再經由我國國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢委員會數學科工作小組依選拔程序脫穎而出者，則有機會前往參加國際性之數學競賽。本次競賽成績於 17 日下午閉幕典禮時揭曉，選拔出第一等獎 3 名，獎金各得壹萬伍仟元；第二等獎 7 名，獎金各得壹萬元；第三等獎 10 名，獎金各得柒仟伍百元。此前三等獎學生除由教育部國民及學前教育署發給獎狀及獎學金外，其指導教師亦可獲該署發給獎狀，並請由主管教育行政機關酌予敘獎。另有 9 位同學在獨立研究項目的成績表現優異，獲頒佳作也由評審委員一併推薦參加該等選拔培訓營。

整體而言，此決賽係集結全國高中數學菁英的競賽，在周詳嚴謹的規劃下進行得非常順利，每位參賽學生均能於此競賽中獲致寶貴的經驗，更可藉由團體共同的生活，互相的切磋，訓練學生的品格修養及人際關係之培養，提高中學生對數學研究的興趣並提高數學教育方面的品質，競賽成績與表現亦可作為我國高中學生於數學理論與應用方面的能力之一項重要的指標。舉辦本競賽的意義，亦是能希望提昇高中生對自然科學的熱誠，尤其在升學競爭激烈的我國，能適度為高中生舉辦一項全國性的競賽活動，期能對數學的教育更有相當助益；另對數學教師及數學教育研究者，也能提供高中科學教育的新思想、新方法的宏觀管道。

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽 **得獎學生**及指導教師名單

- 第一等獎（計 3 名）（獲推薦**亞太數學奧林匹亞研習營(APMO)**）
- 第二等獎（計 7 名）（獲推薦**亞太數學奧林匹亞研習營(APMO)**）
- 第三等獎（計 10 名）（獲推薦**亞太數學奧林匹亞研習營(APMO)**）

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽 **表現優異(佳作)學生**及指導教師名單

- 除獲前三等獎者外，總成績達 49 分以上有參加口試者
  （以下獲推薦**亞太數學奧林匹亞研習營(APMO)**）

- 未參加口試，獨立研究成績達 17 分以上者
  （以下獲推薦**資優數學研習營(GMC)**）

各競賽項目成績統計

編號	筆試（一）			筆試（二）			筆試成績	口試成績	總成績	獨立研究（一）			獨立研究（二）			獨立研究成績	獲獎/推薦
	Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3	(70%)	(30%)		Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3		
11101	35	0	35	15	0	5	30		30	0	1	0	0	0	7	8	
11102	35	35	35	0	15	5	41.67	28	69.67	5	7	0	0	0	7	19	三等獎
11103	35	0	0	0	5	5	15		15	0	4	0	0	0	7	11	
11104	35	5	35	0	10	5	30		30	3	6	0	0	7	7	23	GMC
11105	35	0	10	15	5	5	23.33		23.33	0	0	0	0	0	7	7	
11106																	
11107	35	35	35	10	35	0	50	28	78	7	2	0	0	7	3	19	二等獎
11108	35	5	0	0	5	5	16.67		16.67	4	1	0	0	0	0	5	
11109	35	35	35	20	35	5	55	27	82	0	0	3	0	7	7	17	一等獎
11110	35	0	0	0	0	0	11.67		11.67	0	5	0	0	0	3	8	
11111	35	5	35	35	35	2	49	23	72	7	4	0	6	0	7	24	二等獎
11112	35	35	0	0	35	5	36.67	23	59.67	7	0	0	0	0	3	10	三等獎
11113	35	20	0	20	20	5	33.33	16	49.33	0	7	0	0	7	0	14	APMO
11114	35	0	35	0	0	5	25		25	0	0	0	0	0	3	3	
11115																	
11116	35	35	0	25	5	25	41.67	30	71.67	0	0	0	0	0	0	0	二等獎
11117	30	10	10	0	5	15	23.33		23.33	0	2	0	0	7	3	12	
11118	35	35	35	35	15	0	51.67	28	79.67	0	0	0	6	0	0	6	二等獎
11119	35	5	0	0	0	5	15		15	0	0	0	0	0	0	0	
11120	35	0	25	0	10	0	23.33		23.33	0	7	0	0	0	7	14	
11121	35	5	35	5	10	0	30		30	7	7	0	0	0	7	21	GMC
11122	35	0	0	0	10	5	16.67		16.67	0	0	0	2	0	7	9	
11123	35	35	25	35	35	5	56.67	28	84.67	7	4	7	0	0	7	21	一等獎
11124	35	35	35	0	15	5	41.67	27	68.67	0	0	1	0	7	7	15	三等獎
11125	10	25	0	0	5	0	13.33		13.33	0	4	0	0	0	7	11	
11126	35	5	35	0	10	5	30		30	7	6	0	0	0	7	20	GMC
11127	35	10	35	0	15	15	36.67	22	58.67	0	0	0	0	0	3	3	三等獎
11128	35	35	35	35	35	25	66.67	29	95.67	7	0	7	0	7	7	28	一等獎
11129	35	35	0	0	35	5	36.67	21	57.67	0	0	3	0	0	3	6	三等獎
11130	35	30	0	0	5	5	25		25	0	4	3	5	0	0	12	

編號	筆試（一）			筆試（二）			筆試成績	口試成績	總成績	獨立研究（一）			獨立研究（二）			獨立研究成績	獲獎/推薦
	Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3	(70%)	(30%)		Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3		
11131	35	35	25	5	10	5	38.33	22	60.33	0	0	0	0	0	3	3	三等獎
11132	35	0	0	0	5	5	15		15	1	2	0	0	0	3	6	
11133	35	35	0	5	10	15	33.33	20	53.33	7	7	0	0	0	7	21	APMO
11134	35	35	35	5	5	5	40	24	64	3	0	3	0	0	7	13	三等獎
11135	35	5	35	0	10	5	30		30	0	0	3	0	7	7	17	GMC
11136	35	35	35	15	30	0	50	28	78	7	0	3	0	0	7	17	二等獎
11137	35	0	25	0	10	5	25		25	0	6	3	2	0	7	18	GMC
11138	35	0	35	0	5	0	25		25	1	3	0	0	0	7	11	
11139	35	0	25	0	10	5	25		25	7	0	0	0	0	7	14	
11140	35	10	35	0	10	5	31.67	20	51.67	0	0	1	0	0	7	8	APMO
11141	35	20	35	25	10	5	43.33	27	70.33	0	7	1	0	0	7	15	二等獎
11142	35	35	35	10	10	5	43.33	23	66.33	4	6	0	0	0	7	17	三等獎
11143																	
11144	35	0	35	0	10	20	33.33	23	56.33	7	7	0	0	0	7	21	三等獎
11145	5	0	0	5	10	5	8.33		8.33	4	7	0	2	0	0	13	
11146	35	35	25	0	5	5	35	20	55	7	0	0	0	0	7	14	三等獎
11147	35	35	35	0	0	5	36.67	18	54.67	7	7	0	0	0	3	17	APMO
11148	35	35	0	0	5	0	25		25	0	4	3	3	0	0	10	
11149	35	10	0	0	5	5	18.33		18.33	0	2	0	0	0	0	2	
11150	35	0	35	0	5	5	26.67		26.67	7	0	0	0	0	3	10	
11151	35	35	35	15	10	0	43.33	27	70.33	7	5	0	0	7	3	22	二等獎
11152	35	10	35	0	5	5	30		30	0	0	0	0	0	0	0	
11153																	
11154																	

備註：1.筆試成績以每題 35 分為滿分。

2.獨立研究成績以每題 7 分為滿分，每場成績以三題中選出分數最高之兩題計分。

筆試競賽項目成績分析

【表一】全部參賽學生筆試成績分析（人數：49 人）

項目 \ 題目		筆試(一)35%			筆試(二)35%		
		Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3
全部參賽學生	平均值	33.78	17.24	21.33	6.84	12.04	5.65
	標準差	5.55	15.61	16.00	11.07	10.85	5.71
	得分率	0.97	0.49	0.61	0.20	0.34	0.16
	難　度	0.94	0.39	0.51	0.08	0.14	0.00
	鑑別度	0.23	1.00	1.00	0.31	0.54	0.00

【表二】前三等獎學生筆試成績分析（人數：20 人）

項目 \ 題目		筆試(一)35%			筆試(二)35%		
		Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3
前三等獎學生	平均值	35.00	29.75	28.25	13.50	20.00	7.10
	標準差	0.00	11.29	12.70	13.77	12.46	7.77
	得分率	1.00	0.85	0.81	0.39	0.57	0.20

【表三】各等得獎與其他學生筆試成績分析（請參照【圖一】）

項目 \ 題目		筆試(一)35%			筆試(二)35%		
		Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3
第一等獎(3 人)	平均值	35.00	35.00	31.67	30.00	35.00	11.67
	標準差	0.00	0.00	5.77	8.66	0.00	11.55
	得分率	1.00	1.00	0.90	0.86	1.00	0.33
第二等獎(7 人)	平均值	35.00	28.57	30.00	22.86	20.00	4.57
	標準差	0.00	11.80	13.23	9.94	12.91	9.20
	得分率	1.00	0.82	0.86	0.65	0.57	0.13
第三等獎(10 人)	平均值	35.00	29.00	26.00	2.00	15.50	7.50
	標準差	0.00	12.87	14.30	3.50	10.92	5.40
	得分率	1.00	0.83	0.74	0.06	0.44	0.21
其　他(29 人)	標準差	32.93	8.62	16.55	2.24	6.55	4.66
	平均值	7.14	11.94	16.48	5.28	4.45	3.52
	得分率	0.94	0.25	0.47	0.06	0.19	0.13

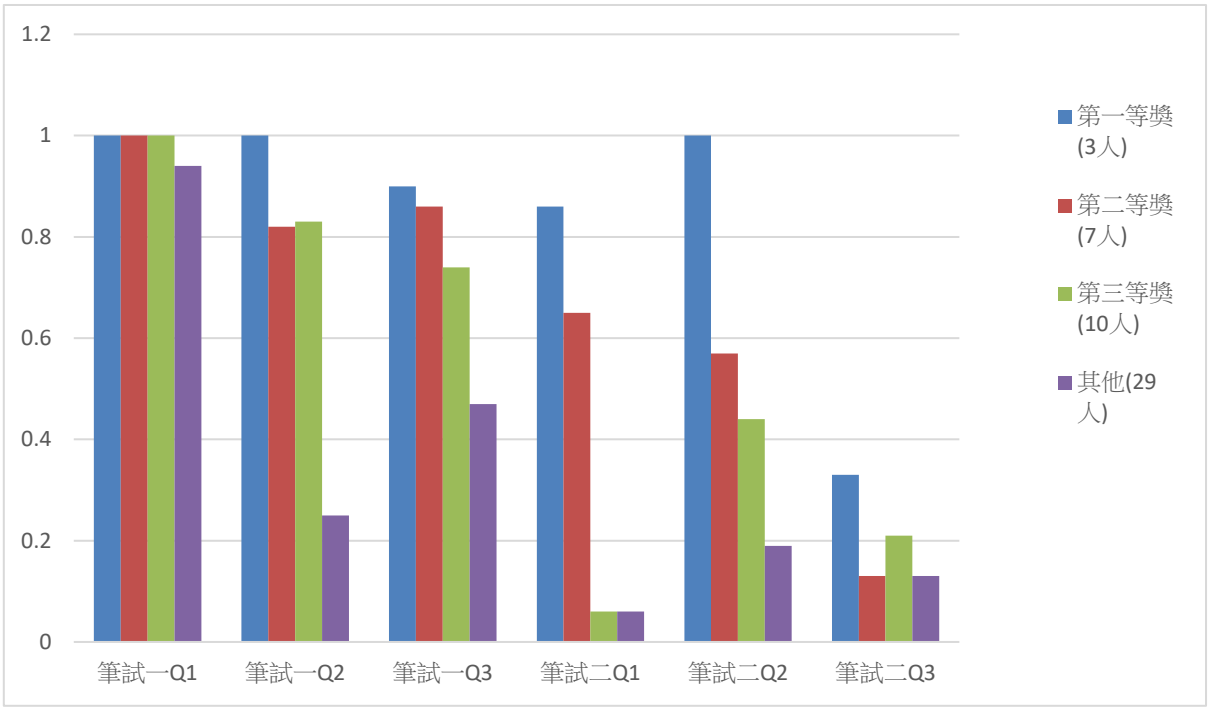
※ 筆試每單題滿分為 35 分

※ 得分率＝平均值÷滿分

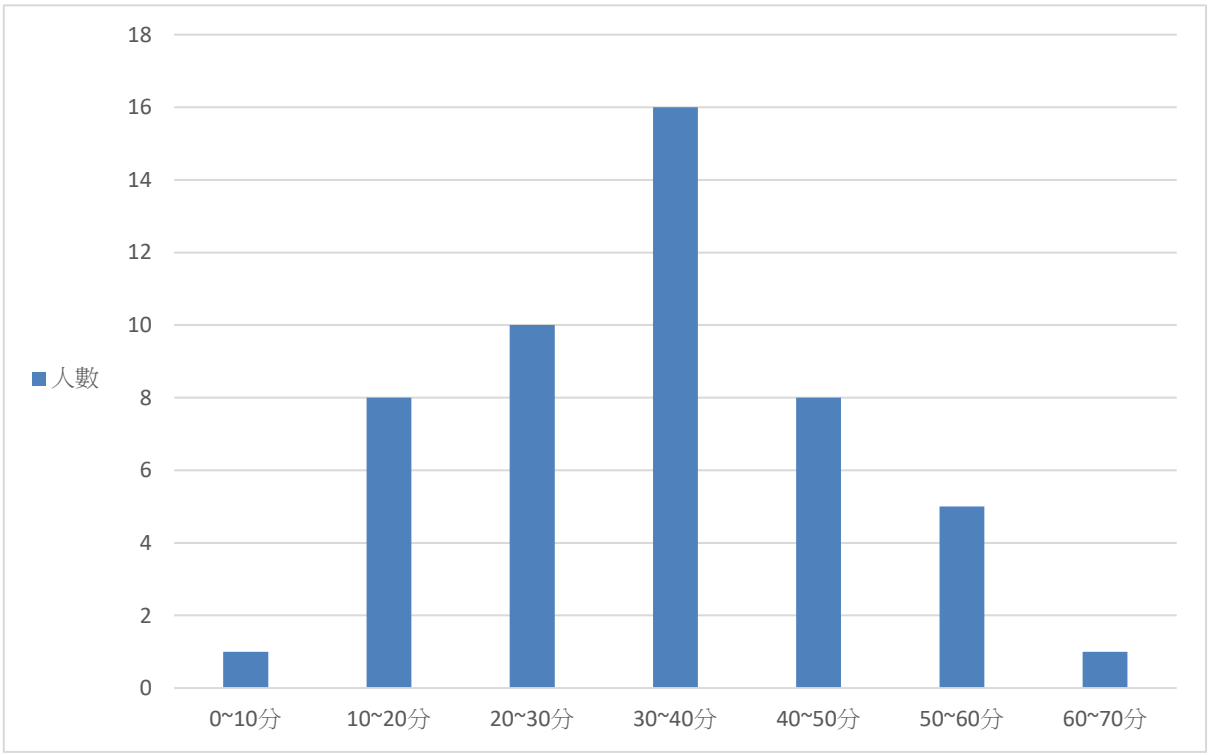
※ 難　度＝答對人數百分比

※ 鑑別度＝高分組答對率－低分組答對率

【圖一】各等得獎與其他學生筆試得分率（請參照【表三】）



【圖二】全部參賽學生筆試成績得分人數分配情形



陸、筆試試題及參考解答

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

筆試（一）試題卷

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時(13:30～15:30)
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、設a,b,c是正實數，且滿足條件$ab+bc+ca+2abc=1$，試證：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16,$$

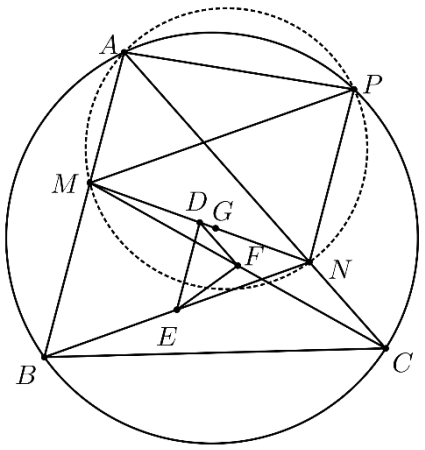
並求等號成立時，a,b,c之值分別是多少？

二、已知有五個不同的四位數，它們的千位數字相同且它們的和恰能被其中的四個數整除，求所有滿足此條件的五個數。

三、如圖，設銳角三角形ABC中，$\overline{AC}>\overline{AB}$，點$M,N$分別在邊$AB,AC$上滿足$\overline{AM}<\overline{AN}$，△$ABC$與△$AMN$的外接圓交於相異兩點$A,P$。設$D,E,F$分別為$\overline{MN},\overline{BN},\overline{CM}$的中點，△$DEF$的外接圓與$\overline{MN}$再交於$D$與$N$之間的一點$G$。證明：

(1)△DEF ~△PMN；

(2)$\frac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$。



111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

筆試（二）試題卷

編號：_____（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時(16:00～18:00)
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、設a,b,c為正整數，且$c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$，試證：c必為奇數且c為完全平方數。

二、$S=\{2350,\ 2351,\ \cdots,\ 2350+k\}$，求所有的正整數$k$，使得集合$S$能分成元素和相等且交集為空集合的兩個子集合$S_1$與$S_2$。

三、設$x\geq 3$且三角形的三邊長為$\log x$，$\log(x+1)$和$\log(x^2+1)$。證明此三角形為鈍角三角形且其鈍內角度數大於120°。

筆試參考解答

題目：

設a,b,c是正實數，且滿足條件$ab+bc+ca+2abc=1$，試證：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16,$$

並求等號成立時，a,b,c之值分別是多少？

解析				
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	筆試一(1)

解答： 因為

$1=ab+bc+ca+2abc \Leftrightarrow 3=ab+bc+ca+2abc+2$

$\Leftrightarrow 3+ab+bc+ca+2(a+b+c)=2abc+2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+2$

$\Leftrightarrow (b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)+(a+1)(b+1)=2(a+1)(b+1)(c+1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$

如果x,y皆為正實數，

則由算幾不等式，得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$，且當$x=y$時等號成立。

$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4a+1}\geq\frac{1}{a+1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4b+1}\geq\frac{1}{b+1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4c+1}\geq\frac{1}{c+1}$

將三式相加，可得：

$$1+\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

$\Rightarrow \frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\geq 1 \qquad (\because \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2)$

$\Leftrightarrow (4b+1)(4c+1)+(4c+1)(4a+1)+(4a+1)(4b+1)\geq(4a+1)(4b+1)(4c+1)$

$\Leftrightarrow 16(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+3\geq 64abc+16(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+1$

$\Leftrightarrow 4(a+b+c)+2\geq 64abc$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)+1\geq 32abc$

$\Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16$

故當$3=4a+1,\ 3=4b+1,\ 3=4c+1$，即$a=b=c=\frac{1}{2}$時，等號成立。

筆試參考解答

題目：

已知有五個不同的四位數，它們的千位數字相同且它們的和恰能被其中的四個數整除，求所有滿足此條件的五個數。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	☐ 自編　☐ 改編於：大陸競賽試題		
	難 易 度	☐ 難　☐ 中等　■ 易	編 號	筆試一(2)

解答： 設此五個數為a_1, a_2, a_3, a_4, a_5，而其千位數字為 k

令S為此五個數的和

$1000k \le a_i < 1000(k+1)$　　$i = 1, 2, 3\ 4, 5$

$a_i + 4000k \le S < 4000(k+1) + a_i$

$$1 + \frac{4k}{1+k} < 1 + \frac{4k}{a_i/1000} \le \frac{S}{a_i} < 1 + \frac{4(k+1)}{\frac{a_i}{1000}} < 1 + \frac{4(k+1)}{k} = 5 + \frac{4}{k}$$

$k = 1$，$3 < \frac{S}{a_i} < 9$，　$\frac{S}{a_i}$ 的可能值為 4, 5, 6, 7, 8

$k \ge 2$，不可能包括上面那些數

$\frac{S}{a_i}$ 的值為(i) 4, 5, 6, 7　或　(ii) 5, 6, 7, 8

(i) $S = 4a_i$，$S = 5a_i$，$S = 6a_i$，$S = 7a_i$

所以 $S = 420t$，因此五個數為 $60t, 70t, 84t, 105t, 101t$

$t = 17$,　1020, 1190, 1428, 1785, 1717

$t = 18$,　1080, 1260, 1512, 1890, 1818

$t = 19$,　1140, 1330, 1596, 1995, 1919

(ii) $S = 5a_i$，$S = 6a_i$，$S = 7a_i$，$S = 8a_i$

所以 $S = 840t$，因此五個數為 $105t, 120t, 140t, 168t, 307t$

但$\frac{307t}{105t} > 2$ (不滿足條件)

故五數為(i)中之數

筆試參考解答

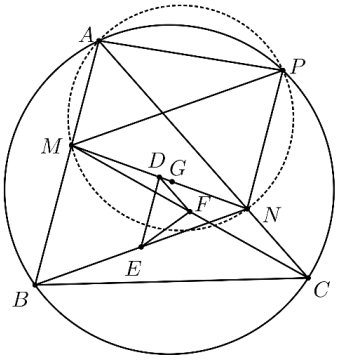
題目：

如圖，設銳角三角形ABC中，$\overline{AC}>\overline{AB}$，點$M,N$分別在邊$AB,AC$上滿足$\overline{AM}<\overline{AN}$，$\triangle ABC$與$\triangle AMN$的外接圓交於相異兩點$A,P$。設$D,E,F$分別為$\overline{MN},\overline{BN},\overline{CM}$的中點，$\triangle DEF$的外接圓與$\overline{MN}$再交於$D$與$N$之間的一點$G$。

證明：

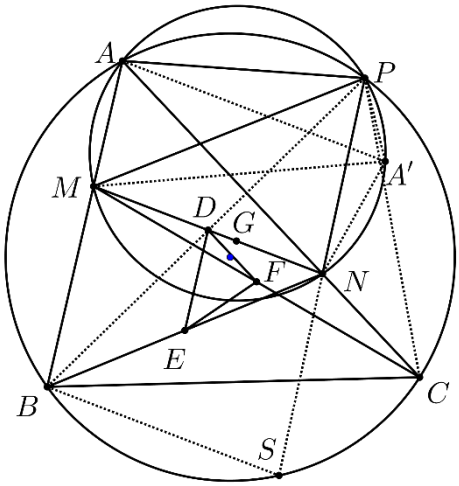
(1) $\triangle DEF\sim\triangle PMN$；

(2) $\frac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$。



解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　☐ 改編於：		
	難 易 度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編 號	筆試一(3)

解答：



1. 先觀察$\Delta PMN\sim\Delta PBC$：PN與ΔABC的外接圓再交於點S．則$\angle MPN=\angle MAN=\angle BAC=\angle BPC$，
$\angle PNM=180°-\angle BAP=\angle BSP=\angle BCP$
所以得$\Delta PMN\sim\Delta PBC$.

2. 因此得$\begin{aligned}\angle MPB&=\angle MPN-\angle BPN\\&=\angle BPC-\angle BPN=\angle NPC\end{aligned}$
且$\frac{MP}{BP}=\frac{NP}{CP}$．故　$\Delta PMB\sim\Delta PNC$.

3. 因D,E,F為中點，$DE\parallel AB,DF\parallel AC$，得
$\angle EDF=\angle BAC=\angle MAC=\angle MPN$.
又$\frac{DE}{DF}=\frac{\frac{1}{2}MB}{\frac{1}{2}NC}=\frac{PM}{PN}$（$\because\Delta PMB\sim\Delta PNC$）．由此得$\Delta PMN$與$\Delta DEF$相似。

4. 設A'為ΔAMN的外接圓上一點使得$AA'\parallel MN$，所以$AMNA'$為圓內接等腰梯形，得
$\angle GDE=\angle NMB=\angle A'AM=\angle A'PM$或$180°-\angle A'PM$.
所以得$\frac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\frac{\sin\angle DFE}{\sin\angle GDE}=\frac{\sin\angle PNM}{\sin\angle A'PM}=\frac{\overline{MP}}{\overline{MA'}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$.

筆試參考解答

題目：

設a,b,c為正整數，且$c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$，試證：c必為奇數且c為完全平方數。

解析				
	類　　型	□ 代數(A)　■ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：Math competition		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	筆試二(1)

解答：

(1) 利用反證法，假設 c 為偶數，即 $c=2c_1$ 。

原式改寫為：$c_1(2ac_1+1)^2=(5c_1+b)(4c_1+b)$

令 $d=(b,c_1)$ ∴令 $b=db_0$, $c_1=dc_0$ ，其中 $(b_0,c_0)=1$ 。

$\Rightarrow\ c_0(2adc_0+1)^2=d(5c_0+b_0)(4c_0+b_0)$

$\because (c_0,5c_0+b_0)=(c_0,4c_0+b_0)=1$ 且 $(d,(2adc_0+1)^2)=1\Rightarrow d\mid c_0, c_0\mid d$

$\therefore d=c_0$ 且 $(2adc_0+1)^2=(5c_0+b_0)(4c_0+b_0)$

$\because (5c_0+b_0,4c_0+b_0)=(c_0,4c_0+b_0)=(c_0,b_0)=1$

因此可設 $5c_0+b_0=m^2$, $4c_0+b_0=n^2$，其中 m,n 為正整數，所以 $m>n$，即 $m-n\geq 1\ \Rightarrow$

$d=c_0=m^2-n^2\Rightarrow\ 2ad^2+1=2adc_0+1=mn$ ，因此

$$mn=1+2ad^2=1+2a(m^2-n^2)^2=1+2a(m-n)^2(m+n)^2$$
$$\geq 1+2a(m+n)^2\geq 1+8amn\geq 1+8mn$$

即 $7mn\leq -1$ （不合），所以 c 不為偶數。

(2) 令 $d=(b,c)$ 且 $b=db_0, c=dc_0$ ，其中 $M(b_0,c_0)=1$

則原式為 $c_0(adc_0+1)^2=d(5c_0+2b_0)(2c_0+b_0)$

$\because (b_0,c_0)=1$ 且 c_0 為奇數，

$\therefore (c_0,2c_0+b_0)=1=(c_0,5c_0+2b_0)\Rightarrow c_0\mid d$ ，又 $(d,(adc_0+1)^2)=1\Rightarrow d\mid c_0$

所以 $c_0=d$, $c=dc_0=d^2$ ，得證。■

筆試參考解答

題目：

$S=\{2350,\ 2351,\ \cdots,\ 2350+k\}$，求所有的正整數$k$，使得集合$S$能分成元素和相等且交集為空集合的兩個子集合$S_1$與$S_2$。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	☐ 自編　■ 改編於：大陸競賽題		
	難 易 度	☐ 難　☐中等　■易	**編 號**	**筆試二(2)**

解答： $\sum_{n=0}^{k}(2350+n)=2350(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}$ 必為偶數

$4|k(k+1)$，則 $k=4h$ 或 $k=4h+3$

(i) 設 $k=4h+3$，$h=0,1,2,\ldots$.

令$S_1=\{2350+i|i=4h,4h+3,h=0,1,2,\ldots,\left[\frac{k}{4}\right]\}$

$S_2=\{2350+i|i=4h+1,4h+2,h=0,1,2,\ldots,\left[\frac{k}{4}\right]\}$

則 S_1 與 S_2 滿足所求，因此對所有非負整數 h，$k=4h+3$ 均為所求

(ii) $k=4h$，$h=1,2,\ldots$.

不失其一般性，S_1 元素的個數$\geq 2h+1$，S_2 元素的個數$\leq 2h$

即$\sum_{j=0}^{2h}(2350+j)\leq\sum_{j=2h+1}^{4h}(2350+j)=(2h)^2+\sum_{j=1}^{2h}(2350+j)$

$h\geq 25$，則$k\geq 100$

若$k=4h$且$k\geq 100$，則 S 存在滿足的二子集合分割

$k=100$

$S_3=\{2350,2351,\ldots,2350+50\}$

$S_4=\{2350+51,2350+52,\ldots,2350+100\}$

S_3 中元素的和為$2350\times 51+1275$，

S_4 中元素的和為$2350\times 50+1275+2500$

所以$S_1=S_3\cup\{2425\}-\{2350\}$，$S_2=S_4\cup\{2350\}-\{2425\}$

$k>100$

則前面 101 個數依上面的方式來分，而後面$k-100=4h$的數，每相連接的四個數則依 (i)的方式來分即可。

故所有的正整數值為:$\{k|k=4h+3,h=0,1,2,\ldots;k=4h,h=25,26,\ldots\}$

筆試參考解答

題目：

設$x \geq 3$且三角形的三邊長為$\log x$，$\log(x+1)$和$\log(x^2+1)$。證明此三角形為鈍角三角形且其鈍內角度數大於120°。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　　☐ 改編於：		
	難易度	■ 難　☐ 中等　☐ 易	編號	筆試二(3)

解答：

三角形的最長邊為$\log(x^2+1)$，對應此邊的內角的餘弦為

$$\frac{(\log x)^2+(\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2}{2\log x\log(x+1)}$$

以下證明此式小於$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$，也就是鈍內角度數大於$120^\circ$。由

$$\frac{(\log x)^2+(\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2}{2\log x\log(x+1)}<-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\log x+\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2<\log x\log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x(x+1)}{x^2+1}\log x(x+1)(x^2+1)<\log x\log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x(x+1)}{x^2+1}\log x(x+1)(x^2+1)<\log x^{\frac{1}{4}}\log(x+1)^4$$

只需證明：當$x\geq 3$時，

(1). $x^{1/4}>\frac{x(x+1)}{x^2+1}$

(2). $(x+1)^4>x(x+1)(x^2+1)$

其中(2)明顯成立，對於(1)可由$x^{1/4}>\frac{x(x+1)}{x^2+1}\Leftrightarrow x>\left(\frac{x(x+1)}{x^2+1}\right)^4$

令$x=a+3, a\geq 0$代入上式，即需證明

$$a+3>\left(\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+10}\right)^4=\left(1+\frac{a+2}{a^2+6a+10}\right)^4$$

注意

$$\left(1+\frac{a+2}{a^2+6a+10}\right)^4<\left(1+\frac{a+2}{(a+2)(a+4)}\right)^4=\left(1+\frac{1}{a+4}\right)^4\leq\left(1+\frac{1}{4}\right)^4<3\leq a+3$$

至此證明完畢。

柒、口試試題及參考解答

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
口 試 試 題

注意事項：

(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；
(2) 攜帶本試卷到口試教室應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；
(3) 口試完成後由助理引導至 M716 教室，繼續作答獨立研究。

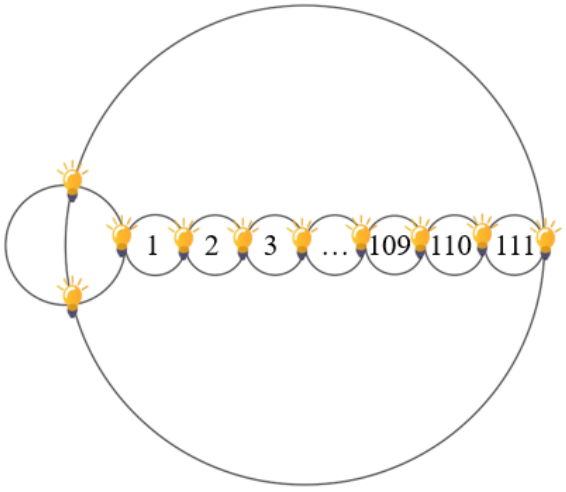
學生編號：_____

一、 設n為正整數。已知不等式$a_{2n}^2 \geq c(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + a_{2n}$對任意嚴格遞增的正整數數列$a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$均成立，試求常數$c$的最大可能值。(此最大值可能與$n$有關)

【解答】

二、 以下圖形為某公園的道路圖，每個道路交叉口都有一盞燈，可以是打開的或關掉的。每一個被道路分割產生的區域都有一個開關，按這個開關後會改變相鄰的路燈的狀態，開的會被關掉，關掉的會被打開。請證明不論開始所有路燈開關的情形為何，都可以適當的按壓不同區域的開關，讓所有的燈都被關掉。

【解答】



口試參考解答

題目：

設n為正整數。已知不等式$a_{2n}^2 \geq c(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+a_{2n}$對任意嚴格遞增的正整數數列$a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$均成立，試求常數$c$的最大可能值。(此最大值可能與$n$有關)

解析				
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：2003 中國女子數奧競賽		
	難 易 度	□ 難　□ 中等　■ 易	編 號	口試一

解答： 常數 c 的最大可能值為 $\dfrac{4n-2}{n}$。

令 $a_i=i$，則 $(2n)^2 \geq c\left(1+3+\cdots+(2n-1)\right)+2n=cn^2+2n$，整理可得 $c \leq \dfrac{4n-2}{n}$。

以下證明：對任意的嚴格遞增正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$，都有

$a_{2n}{}^2 \geq \dfrac{4n-2}{n}\left(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\right)+a_{2n}$。

由於對任一 $i=1,2,\ldots,2n-1$，都有 $a_i \leq a_{2n}-(2n-i)$。所以

$$\begin{aligned}
\text{左}-\text{右} &= a_{2n}{}^2-\frac{4n-2}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}-a_{2n} \\
&\geq a_{2n}{}^2-\frac{4n-2}{n}\left(na_{2n}-\sum_{i=1}^{n}(2n-(2i-1))\right)-a_{2n} \\
&= a_{2n}{}^2-\frac{4n-2}{n}\left(na_{2n}-n^2\right)-a_{2n} \\
&= a_{2n}{}^2-(4n-1)a_{2n}+(4n^2-2n) \\
&= (a_{2n}-2n)^2+(a_{2n}-2n)
\end{aligned}$$

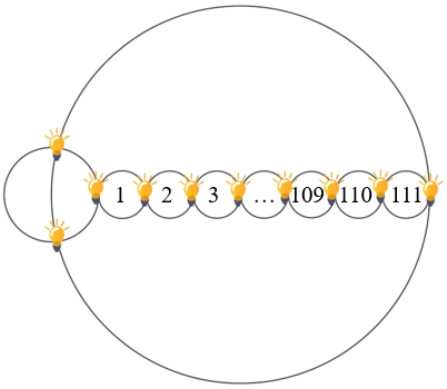
因為 $a_{2n} \geq 2n$，故上式恆大於或等於 0，得證。

註：原題為：給定正整數 n，找出最大實數 λ，使得不等式 $a_n \geq \lambda\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\right)+2a_n$ 對任意遞增正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 均成立。答案：$\dfrac{2n-4}{n-1}$。

口試參考解答

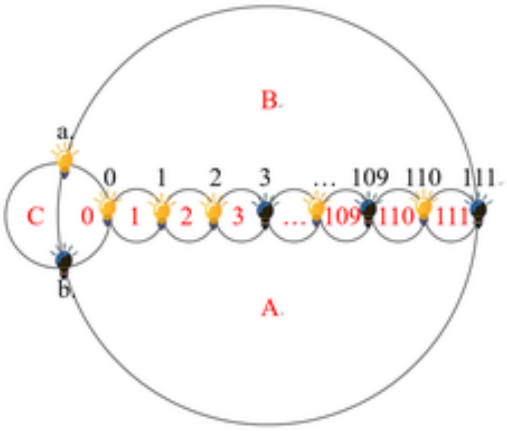
題目：

以下圖形為某公園的道路圖，每個道路交叉口都有一盞燈，可以是打開的或關掉的。每一個被道路分割產生的區域都有一個開關，按這個開關後會改變相鄰的路燈的狀態，開的會被關掉，關掉的會被打開。請證明不論開始所有路燈開關的情形為何，都可以適當的按壓不同區域的開關，讓所有的燈都被關掉。



解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　☐ 改編於：		
	難 易 度	☐ 難　☐ 中等　■ 易	編 號	口試二

解答：我們把區域編號如下(0-111,A,B,C)，同時也把路燈編號為 0-111, a,b，燈 n 是第 n 區右邊的路燈，a,b 則分別是 0 區的上和下。開始時如果 a,b 一開一關，我們可以按 A 讓它們同開或同關。假設燈 n+1-111 都是關的，燈 n 是開的，可以按區域 n 讓燈 n-111 都是關的，而且 a,b 仍然是同開或同關。重覆同樣的方法，可以把 0-111 都關掉。這時如果 a,b 也是關的就完成了，如果 a,b 都是開的，只要再按 C 區就可以把它們關掉。



捌、獨立研究試題及參考解答

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（一）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（8:30～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、已知實數a,b,c皆介於0與1之間，且x,y,z為正實數，如果$a^x=bc$，$b^y=ca$，$c^z=ab$，試證：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\leq\frac{3}{4}。$$

二、若m個互不相同的正偶數與n個互不相同的正奇數之總和為2022，求滿足這樣條件的m與n，其$4m+3n$的最大值。

三、數線上每個整數的位置有一個箱子(規定箱子編號即為其所在的整數位置)，位於原點的箱子(故此箱編號為0)中有一個石頭，其他箱子都是空的，每一次我們可以進行下列操作之一：

(1). (分裂)在某個非空箱子拿出一個石頭，然後在其左、右的箱子個放入一顆石頭。

(2). (合併)選擇編號相差2的兩個非空箱子，各拿出一個石頭，然後在中間箱子放入一個石頭。

如果經過若干次操作之後，竟然只剩下一個石頭，試求出這個石頭所在箱子編號的所有可能。

111 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（二）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（10:20～11:50）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、設$\{a_n\}$為一個無窮的整數數列，且滿足$a_n \neq -1$，
$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0, n \in \mathbb{N}$，求這種$\{a_n\}$的個數有多少？

二、對於一個$\{1, 2, \cdots, n\}$的排列$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，定義一隨機變數$X$如下：先約定$\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$。對$1 \leq i \leq n$，如果$\sigma_{i-1} < \sigma_i$且$\sigma_i > \sigma_{i+1}$，則稱$\sigma_i$是一個“山頂”。定義$X$取值為“山頂出現的次數”。例如：$53261784$有三個山頂$(5, 6, 8)$，故$X = 3$。若每個$\{1, 2, \cdots, n\}$的排列被選取的機會相同，求$E(X)$。

三、圓內接四邊形$ABCD$的一組對邊AD和BC的延長線相交於點P，另一組對邊AB和CD的延長線相交於點Q，$\angle P$和$\angle Q$的平分線相交於點R。對角線AC與BD相交於點K，$\angle DKC$的平分線交CP於點M。求證：
（1）$PR \perp QR$；
（2）$QR \perp KM$。

獨立研究參考解答

題目：

已知實數a,b,c皆介於0與1之間，且x,y,z為正實數，如果$a^x=bc$，$b^y=ca$，$c^z=ab$，試證：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le\frac{3}{4}。$$

解析				
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：Math competition		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	獨立研究一(1)

解答： 令$u=\log_{\frac{1}{2}}a, v=\log_{\frac{1}{2}}b, w=\log_{\frac{1}{2}}c$，由$a^x=bc\Rightarrow x\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{2}}b+\log_{\frac{1}{2}}c\Rightarrow x=\frac{v+w}{u}$，

同理可得 $y=\frac{u+w}{v}, z=\frac{u+v}{w}$。

欲證: $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{v+w}{u}+2}+\frac{1}{\frac{u+w}{v}+2}+\frac{1}{\frac{u+v}{w}+2}\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{u}{2u+v+w}+\frac{v}{u+2v+w}+\frac{w}{u+v+2w}\le\frac{3}{4}$。

令$s=u+v+w$，因此上式

$\Leftrightarrow\frac{u}{s+u}+\frac{v}{s+v}+\frac{w}{s+w}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(1-\frac{u}{s+u}\right)+\left(1-\frac{v}{s+v}\right)+\left(1-\frac{w}{s+w}\right)\ge\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{s}{s+u}+\frac{s}{s+v}+\frac{s}{s+w}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\ge\frac{9}{4s}\Leftrightarrow 4s\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)\ge 9$

利用柯西不等式，可得

$4s\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)=[(s+u)+(s+v)+(s+w)]\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)\ge(1+1+1)^2=9$，

因此$\frac{s}{s+u}+\frac{s}{s+v}+\frac{s}{s+w}\ge\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le\frac{3}{4}$，故得證。

獨立研究參考解答

題目：

若m個互不相同的正偶數與n個互不相同的正奇數之總和為2022，求滿足這樣條件的m與n，其$4m+3n$的最大值。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	☐ 自編　■ 改編於：高中數學競賽教程		
	難 易 度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編 號	獨立研究一(2)

解答：

設$2\le a_1<a_2<\cdots<a_m$為m個互不相同的正偶數及$1\le b_1<b_2<\cdots<b_n$為n個互不相同的正奇數。

由題意知$2022=a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n\ge 2+4+\cdots+2m+1+3+\cdots+2n-1=m^2+m+n^2$

故$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\le 2022+\frac{1}{4}$

利用柯西不等式，可得$4\left(m+\frac{1}{2}\right)+3n\le 5\sqrt{2022+\frac{1}{4}}$

故$4m+3n\le\left\lfloor 5\sqrt{2022+\frac{1}{4}}-2\right\rfloor=222$

取$m=36$，$n=26$，可得$4m+3n=222$

取 2, 4, ..., 68, 70, 72 共 36 個偶數，並取 1, 3, ...,49, 51 共 26 個奇數，此時總和為 2008。

故可取 2, 4, ..., 68, 70 共 35 個偶數以及 86，並取 1, 3, ...,49, 51 共 26 個奇數。

獨立研究參考解答

題目：

數線上每個整數的位置有一個箱子(規定箱子編號即為其所在的整數位置)，位於原點的箱子(故此箱編號為0)中有一個石頭，其他箱子都是空的，每一次我們可以進行下列操作之一：

(1). (分裂)在某個非空箱子拿出一個石頭，然後在其左、右的箱子個放入一顆石頭。

(2). (合併)選擇編號相差2的兩個非空箱子，各拿出一個石頭，然後在中間箱子放入一個石頭。

如果經過若干次操作之後，竟然只剩下一個石頭，試求出這個石頭所在箱子編號的所有可能。

解析				
	類　　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	獨立研究一(3)

解答： 箱子所有可能的編號為 6 的整數倍。

首先不難操作使得只有一個石頭在編號 6 的箱子中，平移得到所有 6 的倍數皆可以。其次，將位於編號為n的箱子中的每一個石頭賦值$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$，則每次操作後所有石頭的賦值之和是一個不變量。(動機是左中右為$\cdots,\frac{1}{x^2},\frac{1}{x},1,x,x^2,\cdots$,要有$1+x^2=x$，解得$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，即為 1 的六次方根)

但一開始的石頭賦值總合為 1，故除了編號為 6 的倍數外皆不可能。

獨立研究參考解答

題目：

設$\{a_n\}$為一個無窮的整數數列，且滿足$a_n \neq -1$，

$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0, n \in \mathbb{N}$，求這種$\{a_n\}$的個數有多少？

解析				
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　　■ 改編於：大陸競賽試題		
	難 易 度	□難　□中等　■易	編 號	獨立研究二(1)

解答： $a_{n+3}a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+1} - 108 = 0$

$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0$

$a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} + 1)(a_{n+3} - a_{n+1})$

$a_3 - a_1 = (a_3 + 1)(a_4 - a_2)$

$a_4 - a_2 = (a_4 + 1)(a_5 - a_3)$

……..

(i) 若$a_3 - a_1 \neq 0$，得$a_4 - a_2 \neq 0$，得$a_5 - a_3 \neq 0$，……

對$n \geq 1$

$0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2}+1|} \leq |a_{n+2} - a_n|$

所以，$\{|a_{n+2} - a_n|\}$為非遞增正整數序列

存在N，對於所有$n \geq N$

$|a_{n+2} + 1| = 1$，　即對於$n \geq N + 2$，$a_n = 0, -2$

因為 $a_{N+4} = \frac{a_{N+2}+108}{a_{N+3}+1}$，所以 a_{N+4} 之值可能為

$\frac{0+108}{0+1} = 108$，$\frac{0+108}{-2+1} = -108$，$\frac{-2+108}{0+1} = 106$，$\frac{-2+108}{-2+1} = -106$

$a_{N+4} = 0, -2$ 所以不可能

(ii) 若$a_3 - a_1 = 0$，得$a_4 - a_2 = 0$，得$a_5 - a_3 = 0$，….

則$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$；$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots$，

$n = 1$，$a_1 = a_3$ 得$a_1 = \frac{a_1+108}{a_2+1}$，即$a_1a_2 = 108 = 2^2 3^3$

a_1值的個數為 2(2+1)(3+1)去除當其值為$-1, -108$，所以為 22 個，$a_2 = \frac{108}{a_1}$

此數列型式為 $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, a_2, \ldots$

獨立研究參考解答

題目：

對於一個$\{1,\ 2,\cdots,n\}$的排列$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，定義一隨機變數$X$如下：
先約定$\sigma_0=\sigma_{n+1}=0$。對$1\le i\le n$，如果$\sigma_{i-1}<\sigma_i$且$\sigma_i>\sigma_{i+1}$，則稱σ_i是一個“山頂”。定義X取值為“山頂出現的次數”。例如：53261784有三個山頂$(5,6,8)$，故$X=3$。若每個$\{1,\ 2,\cdots,n\}$的排列被選取的機會相同，求$E(X)$。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　　☐ 改編於：		
	難 易 度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編 號	獨立研究二(2)

解答：

考慮一表格，以排列為列，以$1,\ 2,\cdots,n$為行，若j是σ_i的山頂，則填$(\sigma_i,\text{j})=$●，否則填○。
只要算有幾個●即可，關鍵是直著算。

引理：第j行有$\text{j}(\text{j}-1)(\text{n}-2)!$個●

證明：易得第一行沒有●，第 2 行有$2\times(\text{n}-2)!$個●，第n行每個位置都是●

對於第j行$(3\le\text{j}\le\text{n}-1)$

1. 若$\sigma_1=j$為山頂，則σ_2有$\text{j}-1$種可能，故有$(\text{j}-1)\times(\text{n}-2)!$種可能
2. 若$\sigma_n=j$為山頂，則σ_{n-1}有$\text{j}-1$種可能，故有$(\text{j}-1)\times(\text{n}-2)!$種可能
3. 若$\sigma_k=j$為山頂，則$\sigma_{k-1}\in\{1,2,\cdots,j-1\}$有$\text{j}-1$種可能，
   $\sigma_{k+1}\in\{1,2,\cdots,j-1\}-\{\sigma_{k-1}\}$有$\text{j}-2$種可能，故有$(\text{j}-1)(\text{j}-2)\times(\text{n}-3)!$ 個●，但k有$\text{n}-2$個可能值，因此一共有
   $$(\text{j}-1)(\text{j}-2)\times(\text{n}-3)!\times(\text{n}-2)=(\text{j}-1)(\text{j}-2)\times(\text{n}-2)!$$
   個●。

由 1+2+3 得$\text{j}(\text{j}-1)\times(\text{n}-2)!$，且此式對$\text{j}=1,2,\text{n}$也都成立，故引理得證。

因此所求為

$$\text{E(X)}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j=1}^{n}j(j-1)(n-2)!}{n!}=\dfrac{n+1}{3}, & n\ge 2\\ 1, & n=1\end{cases}$$

獨立研究參考解答

題目：

圓內接四邊形$ABCD$的一組對邊AD和BC的延長線相交於點P，另一組對邊AB和CD的延長線相交於點Q，$\angle P$和$\angle Q$的平分線相交於點R。對角線AC與BD相交於點K，$\angle DKC$的平分線交CP於點M。求證：

(1). $PR \perp QR$；

(2). $QR \perp KM$。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	☐ 自編　■ 改編於：大陸競賽訓練試題		
	難 易 度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編 號	獨立研究二(3)

解答：

設直線PR交DC、DB、BA分別於點E、F、G。

(1) 因 $\angle EFQ = \angle BAD + \angle APF$、$\angle FEQ = \angle DCP + \angle EPC$，且 $\angle BAD = \angle DCP$、$\angle APF = \angle EPC$，所以 $\angle EFQ = \angle FEQ$。 又因QR為頂角$\angle FQE$的角平分線，故$PR \perp QR$。

(2) 因為

$$\angle DKM = \frac{1}{2}\angle DKC = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAC)$$

$$\angle DGP = \angle ADB - \angle APG = \angle ADB - \frac{1}{2}\angle APB = \angle ADB - \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle DAC)$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAC)$$

所以 $\angle DKM = \angle DGP$，得 $KM \parallel RP$，故由(1)即得 $QR \perp KM$。

玖、111 學年度各分區複賽試題

111 學年度第一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：一組數據由五個正整數組成。已知數據平均值為 12，最大值與最小值之差為 18，眾數及中位數都是 8。試列出這組數據所有的可能值。

(10 分)

問題二：設 m 為十進位制的正整數，已知 m 之各個位數的乘積等於 $m^2-10m-22$，試求 m 的所有可能值。

(12 分)

《背面尚有試題》

問題三：設Γ為座標平面上以原點為圓心，半徑為r的一個圓且A,B,C為該圓周上的三個相異之格子點（指其x,y座標都是整數的點）。試證明：

(1)三角形ABC的面積$\geq\frac{1}{2}$。 (4 分)

(2)三角形ABC的最長邊之邊長大於$r^{\frac{1}{3}}$。 (8 分)

問題四：設複數$z=x+iy$，其中x,y都是有理數。已知$|z|=1$，試證明：對任一整數n，$|z^{2n}-1|$必為有理數。

(12 分)

《試題結束》

111 學年度第一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 若 f 為定義在自然數的函數且

$$f(n)=\begin{cases}\log_8 n, \text{當 } \log_8 n \text{為有理數時；}\\ 0 \quad \text{,其它，}\end{cases}$$

則 $\sum_{n=1}^{2022} f(n)=$ ____(一)____。

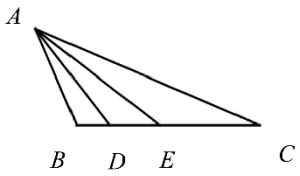
2. 若正實數 a,b 滿足 $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$，則 $\frac{b}{a}=$ ____(二)____。

3. 設 n 為正整數，若 x^{n+2} 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 之餘式為 $R(x)$，則

$\lim_{n\to\infty}\frac{R(-1)}{R(0)}=$ ____(三)____。

《背面尚有試題》

4. 如圖，在ΔABC中，設$\overline{AD}$、$\overline{AE}$三等分$\angle A$。若$\overline{BD}=2$，$\overline{DE}=3$，$\overline{EC}=6$，則ΔABC的最短邊之邊長為____(四)____。



5. 設四邊形有一外接圓且有一內切圓，其四邊邊長分別為 42, 54, 78, 66。若最長邊被內切圓的切點分成長度為x,y兩線段，則數對$(x,y)=$____(五)____。

6. 設a,b,c為正整數且滿足$a+b+c=35$，若a,b,c為三角形之三邊長，則數對(a,b,c)共有____(六)____組。

7. 將一枚均勻的骰子拋擲 3 次，在頭兩次得到點數和等於第三次得到的點數情形下，至少擲出一個 2 點的機率為____(七)____。

8. 若$0\le x\le 2\pi$，則滿足$\tan^2 x-9\tan x+1=0$的所有x值之和為____(八)____。

《試題結束》

111 學年度第一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 10 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 10 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試一】

已知實數 x 滿足拉馬努金等式 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{x}$，求實數 x 的值。（須以最簡單形式表示）

【口試二】

設 m,n 為正整數。試判斷 $\dfrac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}}$ 與 $\dfrac{m!}{m^m}\cdot\dfrac{n!}{n^n}$ 的大小關係。

《試題結束》

111 學年度臺北市(麗山高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

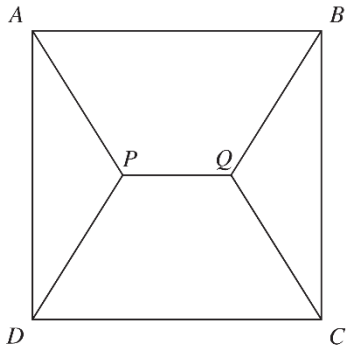
問題一：

(1) 試問方程式 $x+y+2z=14$ 有多少組非負整數解 (x,y,z)？(4 分)

(2) 試找出所有正整數 n，使得方程式 $x+y+2z=n$ 恰有 1260 組非負整數解 (x,y,z)。(8 分)

問題二：

如圖，邊長為 8 的正方形 $ABCD$ 被切割成 2 個全等的等腰梯形和 2 個全等的等腰三角形，試求正方形內的 5 條線段（$\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CQ}$、$\overline{DP}$、$\overline{PQ}$）長度總和的最小值。



(12 分)

＜背面尚有試題＞

問題三：

試求最小的正整數 n，使得有 n 個整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 滿足

$$a_1{}^4 + a_2{}^4 + \cdots + a_n{}^4 = 2077.$$

(12 分)

問題四：

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，且 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 對所有正整數 n 均成立。

(1) 求 $\langle a_n \rangle$ 的一般式。(3 分)

(2) 若數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_1 = a_1$，$\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$，

試證：$(1 + \dfrac{1}{b_1})(1 + \dfrac{1}{b_2}) \cdots (1 + \dfrac{1}{b_n}) < \dfrac{10}{3}$，對所有正整數 n 均成立。

(10 分)

＜試題結束＞

111 學年度臺北市(麗山高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知α,β,γ為三角形的三個內角。
   設向量$\vec{u}=(\sin\beta+\cos\beta,\cos\gamma)$，向量$\vec{v}=(\sin\gamma,\sin\beta-\cos\beta)$，
   若$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{5}$，則$\tan 2\alpha=$___(一)___。

2. 由16個連續正奇數由小到大組成、每項都是四位數、且其總和為立方數的數列共有___(二)___個。

3. 對每一正整數n，令$f(n)$為n的所有正因數之平方和。例如：
   $$f(12)=1^2+2^2+3^2+4^2+6^2+12^2=210.$$
   則$2^{13}\left(\frac{f(640)}{640^2}-\frac{f(320)}{320^2}\right)$之值為___(三)___。

4. 每一項皆為0,1,2的數列，稱為三元數列。則有8項且有奇數個0的三元數列有___(四)___個。

5. 考慮最高次項係數為a的二次實係數多項式$f(x)$，且不等式$f(x)>-2x$的解為$1<x<3$。對滿足上述條件的$f(x)$，其最大值是一個a的函數，記為$G(a)$。則$G(a)$的最小可能值為___(五)___。

＜背面尚有試題＞

6. 已知 a,b,c 皆為正數，且以 $b+c$、$\sqrt{abc}$、$\sqrt{b^2+7bc+c^2}$ 為長度的線段恆能構成三角形，則 a 的範圍為___(六)___。

7. 在一項遊戲中，有甲、乙、丙三人各投擲一顆公正的六面骰子，擲出點數最大的人獲勝；如擲出點數最大的人不只一人，這些擲出最大點數的人再各投擲一次，依此下去直到恰有一人獲勝為止。若甲第一次擲出點數為 3，則甲獲勝的機率為___(七)___。

＜試題結束＞

111學年度臺北市(麗山高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間15分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【問題一】：

求最小的正整數 n，使得排列數 P_n^{2022} 以十進位法表示時，末尾恰有111個零。

(15分)

【解】

＜背面尚有試題＞

【問題二】：

(1) 試說明平面上存在8個點構成的點集合X，使得對X中每一個點A，都可在X中找到另四個點B_1,B_2,B_3,B_4滿足：

$$\overline{AB_1}=1,\quad \overline{AB_2}=2,\quad \overline{AB_3}=3,\quad \overline{AB_4}=\sqrt{13}.$$

(2) 試問：平面上是否存在有限多個點構成的點集合Y滿足以下性質：對Y中每一個點A，都可在Y中找到另六個點B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6使得

$$\overline{AB_1}=1,\quad \overline{AB_2}=2,\quad \overline{AB_3}=3,\quad \overline{AB_4}=\sqrt{2},\quad \overline{AB_5}=\sqrt{3},\quad \overline{AB_6}=\sqrt{13}.$$

(15分)

【解】

＜試題結束＞

111 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (一) 試題

編號：_____ (學生自填)

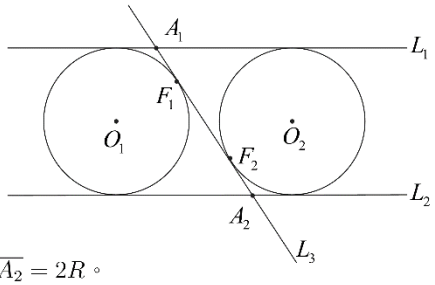
注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： (1) 試說明每一個奇數都可以表示成兩個整數的平方差，
例如：$101 = 51^2 - 50^2$。
(2) 由 $1, 3, 6, 7, 8$ 排成數字都相異的四位數中，任取一數，
試求該數可以表示成兩整數之平方差的機率。

問題二： 已知函數序列 $f_1(x) = \sqrt{x}$、$f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$、$f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$、$\cdots$，依此類推。試求方程式 $f_{10}(x) = 2022$ 的所有實數解 (四捨五入取到整數)。

問題三： 兩圓 O_1 與 O_2 半徑皆為 r，圓心距離為 $2R$，其中 $R > r$。假設三直線 L_1、L_2 及 L_3 均同時與二圓相切，如下圖所示。其中 L_3 分別與圓 O_1、O_2 相切於點 F_1、F_2，且與直線 L_1、L_2 相交於點 A_1、A_2。



(1) 試證：$\overline{A_1A_2} = 2R$。

(2) 現有一橢圓，其長軸為 $\overline{A_1A_2}$，兩焦點分別為 F_1 與 F_2，試求其短軸長。

＜ 試題結束 ＞

111 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (二) 試題

編號：_____ (學生自填)

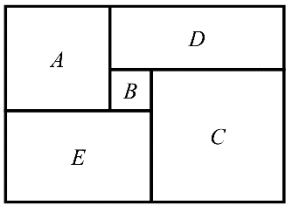
注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，分題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 m 為實數。若方程式 $|x^2-10x|-2mx=1$ 有 4 個相異實根，則 m 的範圍為 **(一)** 。

問題二： 有一橢圓，其一頂點在 $(0,3)$，兩個焦點為 $F_1(-4,0)$ 與 $F_2(4,0)$。若 A 點的坐標為 $(1,1)$，P 為橢圓上的動點，則 $\overline{PA}+\overline{PF_2}$ 的最大值為 **(二)** 。

問題三： 如下圖，三個正方形 A,B,C 與兩個長方形 D,E 組成一個長 36、寬 20 的大矩形。若長方形 D 的面積為 115，則長方形 E 的面積為 **(三)** 。



＜ 背面尚有試題 ＞

問題四： 給定空間中四點 $A(2022, 4044, 2022)$, $B(1017, 2022, 1011)$, $C(2022, 4035, 2022)$, $O(0, 0, 0)$。已知平面 $x + 2y + z = 6$ 與平面 OCA 交於直線 L_1，又與平面 OAB 交於直線 L_2，且 L_1 與 L_2 有一夾角為 θ，則 $\sin\theta =$ ____（四）____ 。

問題五： 凸四邊形 $ABCD$ 中，點 E 與 F 分別為 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 的外心。若 $\overline{AE} = 3$，$\overline{EF} = 7$，且 $\overline{CF} = 5$，則 $\overline{BD}$ 的長度為 ____（五）____ 。

問題六： 設 $\dfrac{\sqrt{2 + 2\cos x}}{2} - \sqrt{1 - \sin x} = \dfrac{2}{5}$，其中 $0 \le x \le \pi$，試問 $\sin x =$ ____（六）____ 。
(須求出所有可能的答案，只答一個不給分。)

問題七： 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，且 $0 \le \theta < 2\pi$。若矩陣 $I + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ 之行列式值為 1，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則 θ 的最大值為 ____（七）____ 。

＜ 試題結束 ＞

111 學年度新北市 (板橋高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題一： 有一正實數數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_1 = 1$，
且對每一個正整數 n，皆滿足 $a_{n+1}^2 + a_{n+1} < a_n$。
試證：對於每一個正整數 n，$a_n < \dfrac{2}{n}$ 皆成立。

問題二： $\triangle ABC$ 中，頂點 A, B, C 的對邊長度分別為 a, b, c，
令 $\angle B = x$。已知 a^2, b^2, c^2 為等差數列，且 x 的方程式
$\sqrt{3}\cos x + \sin x = k$ 有唯一解，試求 k 所有可能的值。

< 試題結束 >

111 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，A',B',C' 分別為 $\triangle ABC$ 三頂點 A,B,C 對三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 及 $\overline{AB}$ 的對稱點。且知 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外接圓交於 A、P 兩點，$\triangle BAA'$ 與 $\triangle BCC'$ 的外接圓交於 B、Q 兩點及 $\triangle CAA'$ 與 $\triangle CBB'$ 的外接圓交於 C、R 兩點。

(1) 設 X、Y 分別為 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外心，且 E、F 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點。試證直線 XF 交直線 YE 於 O 點。

(4 分)

(2) 承 (1) 小題，試證點 O 為 $\triangle AXY$ 的垂心。

(5 分)

(3) 試證 $\overline{AP}$、$\overline{BQ}$ 及 $\overline{CR}$ 三線共點。

(7 分)

問題二： 一共 $n \geq 12$ 個人圍成一圈。已知在任一個人的左右兩側沿著圍著的圈各取五個人，則這十個人恰好男女各半。

(1) 證明 $n = 12$ 時能滿足上述的圍圈方式。

(2 分)

(2) 將這 n 個人由某位開始，順時針編號為 $1,2,3,4,\ldots$，並一直繼續編號下去 (故編號 $n+1$ 與第 1 號是同一個人，編號 $n+2$ 與第 2 號是同一個人 $\cdots$ 以此類推)。對於 $k \geq 1$，令 a_k 表示編號為 $k, k+1, k+2, k+3, k+4$ 這五個人之中的男生個數。證明數列 $\langle a_k \rangle_{k \geq 1} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ 是一個週期 12 的數列。

(6 分)

(3) 證明 n 必為 4 的倍數。

(8 分)

問題三： 設數列 $\langle a_n \rangle$ 為正實數數列 (即 $a_n > 0, n = 0,1,2,\cdots$) 且滿足 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + 1$ $(n \geq 1)$。

(1) 試證：若每個 a_n 都是正整數，則 $\langle a_n \rangle$ 是嚴格遞增數列 (即 $a_{n+1} > a_n$, $n = 0,1,2,\cdots$)。

(6 分)

(2) 找出 a_n 都是正整數的充分必要條件。

(11 分)

111 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (二) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知 $40^a=4$、$40^b=5$，試求 $8^{\frac{1-a-b}{2\,2b}}=$ ___(一)___。
2. 已知 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=\frac{1}{4}$，則 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1=$ ___(二)___。
3. 有一座金字塔，底面是邊長為 a 的正方形，四個側面是全等的等腰三角形，底邊都是 a。已知金字塔的頂點到底面的距離也是 a。設兩相鄰側面形成的兩面角為 θ，則 $\cos\theta=$ ___(三)___。
4. 設實數 x,y 滿足 $|x|+y=3$ 及 $|x|\cdot y+x^3=0$ 且 $x\neq 0$，求 $x+y=$ ___(四)___。
5. 在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$。已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}=1,\overline{CD}=2$。若點 P 為 $\triangle BCD$ 內 (包含邊界) 的動點，則 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的取值範圍為 ___(五)___。
6. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為三次實係數多項式函數，其中 a,b,c,d 為實數。已知 $f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 處近似於直線 $y=\frac{3}{2}x$，在 $x=3$ 處近似於直線 $y=\frac{3}{2}x+2$。則 $(a,b,c,d)=$ ___(六)___。
7. 將 7 個黑點，13 個白點排成一列，已知每一種排法出現的機率相同。今任選一種排法，令隨機變數 X 為黑點與白點相鄰的次數。例如若選出的排法為

○●●○○○●○●○○○●○●○○●○○

，則 $X=12$。試求出 X 的期望值為 ___(七)___。

111 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間12分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

1. 已知 $f(x)$ 滿足
$$f(x)+f(\frac{x-1}{x})=x+1 \quad (x\neq 0,1)$$
，試求 $f(x)$。

2. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O，$\overline{AB}$ 為直徑且 $\overline{AD}=\overline{DC}$，分別延長 $\overleftrightarrow{BA}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於點 E。若 $\overline{AO}=\overline{AE}$ 且 $\overline{AB}=10$，試求 $\overline{AD}$ 的長。

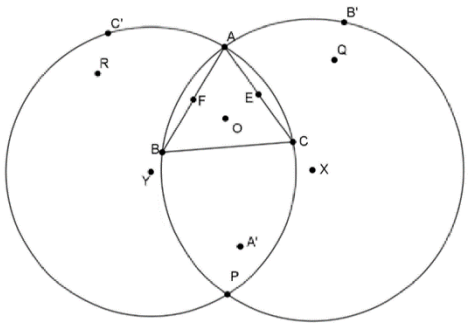
111 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，A',B',C' 分別為 $\triangle ABC$ 三頂點 A,B,C 對三邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 及 $\overline{AB}$ 的對稱點。且知 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外接圓交於 A、P 兩點，$\triangle BAA'$ 與 $\triangle BCC'$ 的外接圓交於 B、Q 兩點及 $\triangle CAA'$ 與 $\triangle CBB'$ 的外接圓交於 C、R 兩點。

(1) 設 X、Y 分別為 $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 的外心，且 E、F 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點。試證直線 XF 交直線 YE 於 O 點。

(2) 承 (1) 小題，試證點 O 為 $\triangle AXY$ 的垂心。

(3) 試證 $\overline{AP}$、$\overline{BQ}$ 及 $\overline{CR}$ 三線共點。



證明 (1)：

(1) 設 E,F 分別為 $\overline{AC},\overline{AB}$ 的中點，則 $\overline{OE}\perp\overline{AC}$。

(2) Y 為 $\triangle ACC'$ 的外心，故 $\overline{YE}\perp\overline{AC}$，因此 Y、O、E 共線。

(3) 同理 X、O、F 共線，故 $\overleftrightarrow{XF}$ 交 $\overleftrightarrow{YE}$ 於 O 點。

證明 (2)：

(1) $\overline{BA}$ 垂直平分 $\overline{CC'}$ ($\overline{BA}$ 為 C,C' 的對稱軸)，且 $\overline{YA}$ 垂直平分 $\overline{CC'}$ (Y 為 $\triangle ACC'$ 的外心)，故 A,B,Y 三點共線。

(2) 同理 A,C,X 三點共線，且 $\overline{XF}\perp\overline{AB}$。

(3) $\overleftrightarrow{XF}$ 與 $\overleftrightarrow{YE}$ 交於 O 點，故 O 為 $\triangle AXY$ 的垂心。

證明 (3)：

(1) $\triangle ABB'$ 與 $\triangle ACC'$ 外接圓交於 A、P，故 $\overline{AP} \perp \overline{XY}$。

(2) $\overline{AO} \perp \overline{XY}$，故 A, O, P 共線，亦即 $\overleftrightarrow{AP}$ 通過 O 點。

(3) 同理，$\overleftrightarrow{BQ}$ 及 $\overleftrightarrow{CR}$ 通過 O 點。

問題二： 一共 $n \geq 12$ 個人圍成一圈。已知在任一個人的左右兩側沿著圍著的圈各取五個人，則這十個人恰好男女各半。

(1) 證明 $n = 12$ 時能滿足上述的圍圈方式。

(2) 將這 n 個人由某位開始，順時針編號為 $1,2,3,4,\ldots$，並一直繼續編號下去(故編號 $n+1$ 與第 1 號是同一個人，編號 $n+2$ 與第 2 號是同一個人 $\cdots$ 以此類推)。對於 $k \geq 1$，令 a_k 表示編號為 $k, k+1, k+2, k+3, k+4$ 這五個人之中的男生個數。證明數列 $\langle a_k \rangle_{k \geq 1} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ 是一個週期 12 的數列。

(3) 證明 n 必為 4 的倍數。

證明 (1)：

構造：由一點鐘位置往右 010101，由十二點鐘位置往左也 010101。 □

證明 (2)：由條件知 $a_k + a_{k+6} = 5$，故 $a_{k+6} = 5 - a_k$。因此

$$a_{k+12} = 5 - a_{k+6} = a_k$$

因此 a_k 是週期 12 的數列。 □

證明 (3)：由 (2) 我們有

$$a_{k+6m} = \begin{cases} a_k, & if\ m \equiv 0 \mod 2, \\ 5 - a_k, & if\ m \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

又因為 n 個人繞一圈，所以 $a_k = a_{k+n} = a_{k+2n} = \cdots$。

若 n 為奇數，令 $k = 1, m = n$，得 $a_1 = a_{1+6n} = 5 - a_1$ 與 a_1 為整數矛盾，故 n 為偶數。

若 $n \equiv 2 \mod 4$，則令 $k = 1$ 及 $m = \ell = \frac{n}{2}$ 為奇數，故 $a_{1+6\ell} = 5 - a_1$ 又 $a_{1+6\ell} = a_{1+3n} = a_1$，兩式矛盾。

因此 n 為 4 的倍數。 □

問題三： 設數列 $\langle a_n\rangle$ 為正實數數列 (即 $a_n>0,\ n=0,1,2,\cdots$) 且滿足 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1$ $(n\geq 1)$。

(1) 試證：若每個 a_n 都是正整數，則 $\langle a_n\rangle$ 是嚴格遞增數列 (即 $a_{n+1}>a_n,\ n=0,1,2,\cdots$)。

(2) 找出 a_n 都是正整數的充分必要條件。

證明 (1)：由 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+1$，兩邊同減 a_na_{n-1} 得

$$a_n(a_n-a_{n-1})-1=a_{n-1}(a_{n+1}-a_n) \tag{1}$$

特別地，當 $n=1$ 時有

$$a_1(a_1-a_0)-1=a_0(a_2-a_1) \tag{2}$$

先證 $a_1>a_0$：

若 $a_1\leq a_0$，則由 (2) 式得 $a_2<a_1$，再由 (1) 式得 $a_3<a_2, a_4<a_3,\cdots$

因此必有一項 $a_k\leq 0$，矛盾。

因為 a_0,a_1 都是正整數且 $a_0<a_1$，所以 $a_1(a_1-a_0)-1>0$。由 (2) 式得 $a_2>a_1$

同理，因為 a_n,a_{n-1} 都是正整數且 $a_n>a_{n-1}$，則由 (1) 式可知 $a_{n+1}>a_n$

由數學歸納法，得證 □

證明 (2)：

$$\frac{a_n^2+a_{n+1}^2-1}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n-1}a_{n+1}+a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}^2+a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_{n-1}^2+a_n^2-1}{a_{n-1}a_n} \tag{3}$$

由 (3) 可知，對任意的 n，$\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}$ 都是定值，記為 d。因此我們有

$$a_{n+1}=da_n-a_{n-1}\qquad n=1,2,3,... \tag{4}$$

要證 a_n 都是正整數的充要條件為 a_0,a_1 及 d 都是正整數且 $a_1>a_0$

($\Leftarrow$) 由 (4) 式，所有 a_n 都是整數，再由題意 a_n 為正數，可知每個 a_n 是正整數。

(⇒) 假設每個 a_n 都是正整數，由 (1) 小題知 $a_1 > a_0$

若 $d = \dfrac{a_1 + a_3}{a_2}$ 不是整數。因為 a_2, a_3 互質 (由 $a_2^2 - a_1 a_3 = 1$)，則 da_3 不是整數

因此 $a_4 = da_3 - a_2$ 不是整數，矛盾。 □

111 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試二參考答案)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{5}$	$4-\sqrt{13}$
(五)	**(六)**	**(七)**	
$[\frac{-3}{2},\frac{3}{2}]$	$(\frac{-1}{2},3,-3,2)$	$\frac{91}{10}$	

111 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

1. 已知 $f(x)$ 滿足

$$f(x)+f(\frac{x-1}{x})=x+1 \quad (x\neq 0,1)$$

，試求 $f(x)$。

【解】以 $\frac{t-1}{t}$ 代入原方程式得到

$$f(\frac{t-1}{t})+f(\frac{-1}{t-1})=\frac{2t-1}{t} \tag{5}$$

再以 $\frac{-1}{t-1}$ 代回原方程式得到

$$f(\frac{-1}{t-1})+f(t)=\frac{t-2}{t-1} \tag{6}$$

原方程式 $+(6)-(5)$ 式可以得到

$$2f(x)=x+1+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}$$

故得到

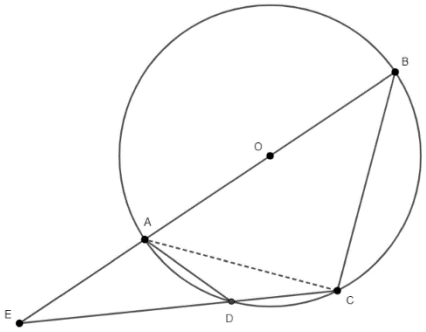
$$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

□

111 學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

2. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O，$\overline{AB}$ 為直徑且 $\overline{AD}=\overline{DC}$，分別延長 $\overleftrightarrow{BA}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於點 E。若 $\overline{AO}=\overline{AE}$ 且 $\overline{AB}=10$，試求 $\overline{AD}$ 的長。

【解】



(1) 令 $\overline{AD}=\overline{DC}=x$，且 $\angle CAD=\angle DCA=\alpha$。

(2) 由正弦定理 $\dfrac{x}{\sin\alpha}=10\Rightarrow x=10\cdot\sin\alpha$。

(3) $\angle ABC=2\alpha$，故 $\angle AED=90^\circ-3\alpha$ 且 $\angle ADE=2\alpha$。

(4) 在 $\triangle ADE$ 中，$\dfrac{5}{\sin 2\alpha}=\dfrac{x}{\sin(90^\circ-3\alpha)}=\dfrac{10\cdot\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$

得 $2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha=\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$

(5) 得 $3\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=1\Rightarrow 3\tan\alpha\cdot\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=1\Rightarrow 6\tan^2\alpha=1-\tan^2\alpha$

(6) 得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{7}},\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$，所以 $\overline{AD}=10\cdot\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$。 □

111 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

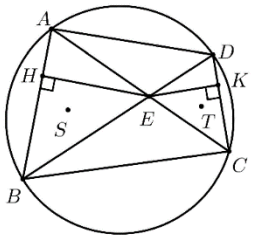
一、(9 分) 在集合$\{1, 2, \cdots\cdots, 100\}$任意選3個不同的數字組合成一個三角形的三邊長，共有幾種選法？

二、(10 分) 證明$C_1^{89} + C_2^{89} + \cdots + C_{59}^{89}$ 為89^2的倍數。

三、(10 分) 令正整數$a_1, a_2, \cdots, a_{16}, a_{17}$，滿足$a_1 < a_2 < \cdots < a_{16} < a_{17}$且$\sum_{i=1}^{17} a_i^2 \le 3090$，求$a_{13} - a_8$的最大值。

四、(10 分) 設$f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} - 1 + \left| \frac{2x}{1011} - 4\left[\frac{x}{2022}\right] - 2 \right|$，其中$[x]$表不大於$x$的最大整數。已知$f$為週期函數，令$T$表$f$的週期，$K$表$f(x) = 0$在區間$[0, T]$中解的個數，求$K$。

五、(10 分) 設$ABCD$為圓內接四邊形，點E是對角線$\overline{AC}, \overline{BD}$的交點，自$E$至$\overline{AB}, \overline{CD}$的垂線的垂足分別為$H, K$，$\Delta ABE, \Delta CDE$的外心分別為$S, T$. 證明：$S, T, H, K$共圓。



111學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $a\geq 0, b\geq 0$，已知 $a^2+2b^2=1$，求 $a+b$ 的最大值與最小值之和。

二、設 a,b 為互質的正整數且都不小於 10，若 $7a+11b$ 為 13 的倍數，求 $a+b$ 的最小值。

三、數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=\sqrt{2}+1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n},\ n=1,2,\cdots$。若從此數列中挑出100項，使其總和為 $90-20\sqrt{2}$，求此100項的乘積。

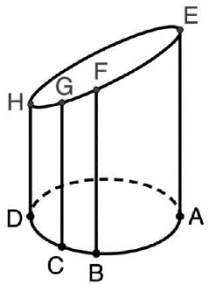
四、已知 $f(x)$ 滿足 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，且 $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

設 $b_n=n^2+3n+1$，求 $f\left(\dfrac{1}{b_1}\right)+f\left(\dfrac{1}{b_2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{b_{2020}}\right)+f\left(\dfrac{1}{2022}\right)$.

五、設甲、乙兩個袋子分別有 2 黑 1 白和 2 白 1 黑各 3 顆球，每次操作會先從甲袋任選一球放入乙袋（此時有 4 顆球），再從乙袋任選一球放回甲袋。將上述操作完整作 2 次，求 3 顆黑球和 3 顆白球恰好分在兩袋的機率。

六、已知 E 是矩形 $ABCD$ 邊 $\overline{AD}$ 的中點，$\overline{BE}$ 和 $\overline{AC}$ 垂直於點 F，$\overline{AF}=2$，求 $\overline{DF}$.

七、將一底半徑為 5 的直圓柱，用一平面截過而得一頂面為橢圓的柱狀體(如圖所示)。設 E,F,G,H 為橢圓上的四點，其中 E,H 為長軸上的兩端點，A,B,C,D 分別為此四點在底圓的投影點。已知 B,C 在底圓的直徑 $\overline{AD}$ 的同側，且 $\overline{BC}=3, \overline{BF}=10, \overline{CG}=7$，求 $\overline{AE}+\overline{DH}$ 的最大值。



111 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（一）　　編號：＿＿＿

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、(9 分) 已知 $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x-1,\ g(x)=x^3-3x^2+2x+1$ 是兩個整數係數多項式，假設 a, b, c 是 $g(x)$ 的三個相異根，求 $\dfrac{f(c)}{f(a)f(b)}+\dfrac{f(a)}{f(b)f(c)}+\dfrac{f(b)}{f(c)f(a)}$.

二、(10 分) 設 $a_1=2,\ a_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}+\dfrac{7}{3a_{n-1}^2}$，其中 $n=2, 3, 4, \cdots$.

證明：(1) $\sqrt[3]{7}<a_n\le 2$, 對所有 $n\ge 1$.

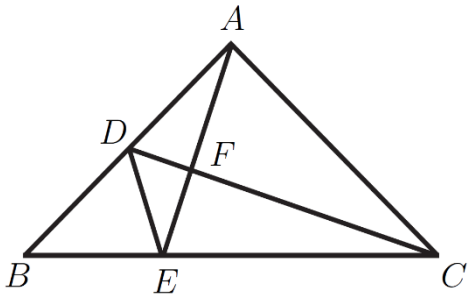
(2) $a_4-\sqrt[3]{7}<\dfrac{1}{5}10^{-9}$.

三、(10 分) 求所有整數 x, y, z 滿足

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^3+y^3+z^3=88 \end{cases}$$

四、(10 分) 某人從數線上的原點出發(第 0 步)，每一步皆獨立且隨機地往左一單位或往右一單位，每一步往左一單位的機率為 $1/3$、往右一單位的機率為 $2/3$，試算第 1 步至第 5 步之間曾經回到原點，且第 6 步位於數線-2 或 2 的機率。

五、(10 分) 如圖，等腰三角形 ΔABC 中，$\angle A=90°$，D 為 $\overline{AB}$ 的中點，線段 $\overline{BC}$ 上有一點 E 使得 $\overline{AE}\perp\overline{CD}$，而線段 $\overline{AE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 F。試證 $\angle ADC=\angle BDE$。



111 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（二）　　**編號：＿＿**

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 若對每一個實數 x, $\log_{0.5}\dfrac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}>\log_{0.5}3$ 恆成立。

求實數 a 的範圍＿＿＿＿＿＿。

二、 在複數平面上，設 $D=\left\{z=a+bi:\ a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2=1\right\}$.

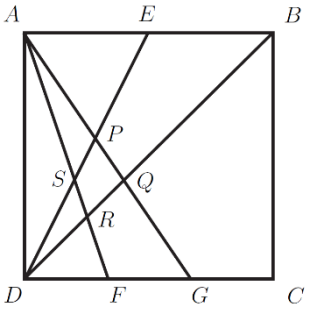
求 $\left|z^2+z-6\right|$ 在 D 上之最大值為＿＿＿＿＿.

三、 有一組座標 $(a_n,\ b_n)$，其中 a_n 是正整數，$0<b_n<1$；若給定 $(a_1,\ b_1)$ 之後，下一個座標的規則如下：

$a_{n+1}=\left[\dfrac{1}{b_n}\right],\ b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n}-a_{n+1}$，其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

若 $(a_1,\ b_1)=(1,\ 2-\sqrt{3})$, 試求出 $(a_{2022},\ b_{2022})=$＿＿＿＿＿＿.

四、 如圖，有一個邊長為 6 的正方形 $ABCD$, 點 E 為 $\overline{AB}$ 的中點，點 F,G 為 $\overline{CD}$ 的三等分點。連接 $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DE}$, $\overline{DB}$ 之後四直線圍出一個四邊形 $PQRS$, 試求四邊形 $PQRS$ 的面積為＿＿＿＿＿。



五、 求 $\sqrt[3]{1733.1}$ 之值為＿＿＿＿＿（四捨五入至小數點後第 3 位）。

六、 西夏國要徵駙馬，進入到最後冠軍戰，虛竹跟慕容復將進行最後的冠軍戰。決戰方式是由公主出一題猜謎，兩人答題分獨立兩處進行，因為虛竹看起來較笨，所以他要在三次以內答對公主的題目，慕容復則需要在兩次以內答對，才能成為駙馬。假設虛竹每次答對的機率是 $\dfrac{1}{9}$，則慕容復每次答對的機率至少要多少，他的當選機率會超過虛竹？ ＿＿＿＿＿（答案請寫至小數點後第二位）。

七、 將1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8八個數字排成一個可以被 11 整除的八位數，共有 x 種排法。則 $x=$_____.

111 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

由除法原理 $f(x)=(x-3)g(x)+2-x$

知 $f(a)=2-a,\ f(b)=2-b,\ f(b)=2-c$

由根與係數 $g(x)=x^3-3x^2+2x+1=(x-a)(x-b)(x-c)$

知 $a+b+c=3,\quad ab+bc+ca=2,\ g(2)=(2-a)(2-b)(2-c)=1$

原式 $\dfrac{f(c)}{f(a)f(b)}+\dfrac{f(a)}{f(b)f(c)}+\dfrac{f(b)}{f(c)f(a)}$

$=\dfrac{f(c)^2+f(a)^2+f(b)^2}{f(a)f(b)f(c)}$

$=\dfrac{(2-a)^2+(2-b)^2+(2-c)^2}{(2-a)(2-b)(2-c)}=\dfrac{5}{1}=5$

因為 $(2-a)^2+(2-b)^2+(2-c)^2$

$=((2-a)+(2-b)+(2-c))^2-2((2-a)(2-b)+(2-b)(2-c)+(2-c)(2-a))$

$=(6-(a+b+c))^2-2(3\cdot 2^2-4(a+b+c)+(ab+bc+ca))$

$=(6-3)^2-2(3\cdot 2^2-4\cdot 3+2)=5$

二、【解】

(1)對於 $n=1$　不等式

$\sqrt[3]{7}<a_n\le 2\cdots(*)$

顯然成立。

假設 $n=k$, 這不等式(*)成立。

當 $n=k+1$, 現在利用算術平均數大於等於幾何平均數，得

$a_{k+1}=\dfrac{2}{3}a_k+\dfrac{7}{3a_k^2}=\dfrac{1}{3}(a_k+a_k+\dfrac{7}{a_k^2})\ge\sqrt[3]{7}$

因為 a_k 為有理數，所以 $a_{k+1}>\sqrt[3]{7}$

此外 $a_{k+1}=\dfrac{2}{3}a_k+\dfrac{7}{3a_k^2}<\dfrac{2}{3}a_k+\dfrac{a_k^3}{3a_k^2}=a_k\le 2$

由數學歸納法知 $\sqrt[3]{7}<a_n\le 2,$ 對所有 $n\ge 1.$

(2)令 $\alpha=\sqrt[3]{7}$ ，則 $\alpha^3=7$ 且

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}a_n+\frac{\alpha^3}{3a_n^2}-\alpha$$

$$=\frac{1}{3a_n^2}(2a_n^3-3\alpha a_n^2+\alpha^3)$$

$$=\frac{(2a_n+\alpha)}{3a_n^2}(a_n-\alpha)^2\le\frac{1}{a_n}(a_n-\alpha)^2\le\frac{1}{\alpha}(a_n-\alpha)^2$$

由於 $a_1^3-\alpha^3=(a_1-\alpha)(a_1^2+a_1\alpha+\alpha^2)$

$$=(a_1-\alpha)(4+2\alpha+\alpha^2)\ge10(a_1-\alpha)$$

知 $a_1-\alpha\le\frac{1}{10}$,

所以

$$a_4-\alpha\le\frac{1}{\alpha}(a_3-\alpha)^2\le\frac{1}{\alpha^3}(a_2-\alpha)^4\le\frac{1}{\alpha^7}(a_1-\alpha)^8$$

$$\le\frac{1}{49\alpha}10^{-8}<\frac{1}{5}10^{-9}$$

三、【證明】

將 $z=4-x-y$ 代入 $x^3+y^3+z^3=88$

得 $x^3+y^3+(4-x-y)^3=88$

展開上式得 $x^3+y^3+64-48(x+y)+12(x+y)^2-(x+y)^3=88$

利用 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ 代入上式再提出 $x+y$ 項

得因式分解 $(x+y)(4(x+y)-xy-16)=8$.....(1)

由對稱性可設 $x\ge y\ge z$ 再由(1)式可知 $x+y=1,2,4$ 或 8

Case 1. $x+y=1$. 代入(1)式得 $4-x(1-x)-16=8$

故 $x^2-x-20=0$ 解得 $x=5,-4$ 此時 $x=5,y=-4$

代回得 $x=5,y=-4,z=3$（不合）

Case 2. $x+y=2$. 代入(1)式得 $8-x(1-x)-16=4$

故 $x^2-2x-12=0$ 解得 x 無整數解

Case 3. $x+y=4$. 代入(1)式得 $16-x(1-x)-16=2$

故 $x^2-4x-2=0$ 解得 x 無整數解

Case 4. $x+y=8$. 代入(1)式得 $32-x(1-x)-16=1$

故 $x^2-8x+15=0$ 解得 $x=5,3$ 此時 $x=5,y=3$

代回得結論 $x=5,y=3,z=-4$

因此 x,y,z 的所有整數解為

$(x,y,z)=(5,3,-4),(5,-4,3),(3,-4,5),(3,5,-4),(-4,5,3),(-4,3,5)$

四、【解】

(Method 1)

令第 k 步在數線上的位置為 x_k；每一步往右的機率為 p=2/3、往左的機率為 q=1-p=1/3。

因僅會在偶數步時回到原點，令事件 A 為$(x_2=0)$、事件 B 為$(x_4=0)$。

$$P\left\{[A\cup B]\cap\left[(x_6=-2)\cup(x_6=2)\right]\right\}=P\left\{(A\cup B)\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{(A\cup B)\cap(x_6=2)\right\}$$

$$=P\left\{\left[(A)\cup\left(A^c\cap B\right)\right]\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{\left[(A)\cup\left(A^c\cap B\right)\right]\cap(x_6=2)\right\}$$

$$=P\left\{A\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{\left(A^c\cap B\right)\cap(x_6=-2)\right\}+P\left\{A\cap(x_6=2)\right\}+P\left\{\left(A^c\cap B\right)\cap(x_6=2)\right\}$$

$$=P(A)\times P\left(x_6=-2\middle|A\right)+P\left(A^c\cap B\right)\times P\left(x_6=-2\middle|A^c\cap B\right)$$
$$+P(A)\times P\left(x_6=2\middle|A\right)+P\left(A^c\cap B\right)\times P\left(x_6=2\middle|A^c\cap B\right)$$

$$=P(A)\times P\left(x_6=-2\middle|A\right)+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]\times P\left(x_6=-2\middle|A^c\cap B\right)$$
$$+P(A)\times P\left(x_6=2\middle|A\right)+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]\times P\left(x_6=2\middle|A^c\cap B\right)$$

$$=\left(\frac{2!}{1!1!}\right)pq\times\left(C_1^4p^1q^3\right)+\left(\frac{4!}{2!2!}-\frac{2!}{1!1!}\times\frac{2!}{1!1!}\right)p^2q^2\times\left(C_0^2p^0q^2\right)$$
$$+\left(\frac{2!}{1!1!}\right)pq\times\left(C_3^4p^3q^1\right)+\left(\frac{4!}{2!2!}-\frac{2!}{1!1!}\times\frac{2!}{1!1!}\right)p^2q^2\times\left(C_2^2p^2q^0\right)$$

$$=10p^2q^4+10p^4q^2=10\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=\frac{200}{729}$$

(Method 2)

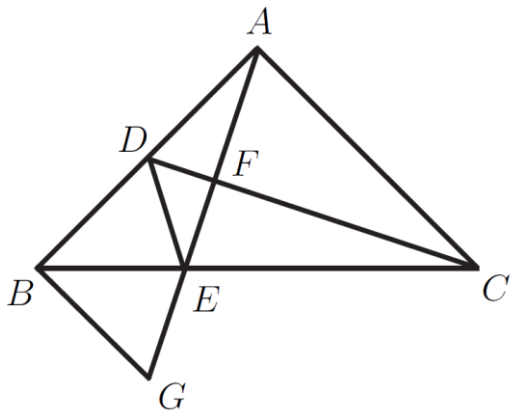
假設 x 座標代表到達的位置，y 座標代表走的步數；每一步往右的機率為 p、往左的機率為 q。

- 假設第一步走到(1,1)，則前五步一定要碰到 y 軸(x=0)，第六步要走到(2,6)的路徑，一定有一條從 (-1,1)走到(2,6)的路徑與之對應，所以可能的路徑數為 C_2^5，也就是往右走 4 步，往左走 2 步。每一個路徑發生的機率為 p^4q^2，所以這種情況之下的機率為 $C_2^5p^4q^2$。
- 假設第一步走到(-1,1)，則前五步一定要碰到 y 軸(x=0)，第六步要走到(-2,6)的路徑數，根據反射原理，等於第一步走到(1,1)，第六步要走到(-2,6)的路徑數，亦為 C_2^5，即必須要往右走 2 步，往左走 4 步，每一個路徑發生的機率為 p^2q^4，所以這種情況之下的機率為 $C_2^5p^2q^4$。

所以滿足題意的機率為 $C_2^5 p^4 q^2 + C_2^5 p^2 q^4 = 10\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4\right) = \frac{200}{729}$

五、【證明】

如右圖所示，將 $\overline{AE}$ 延長，並在 $\overline{AE}$ 的延長線上找一點 G 使得 $\overline{GB} \perp \overline{AB}$.



考慮：ΔCAD 與 ΔABG, 因為

$\angle CAD = \angle ABG = 90°$, 而 $\overline{CA} = \overline{AB}$($\Delta ABC$ 為等腰三角形)，又

$\angle FAC + \angle ACD = 90° = \angle FAC + \angle BAG$, 得到

$\angle ACD = \angle BAG$.

因此 $\Delta CAD \cong \Delta ABG$($ASA$ 全等)，於是

$\overline{BG} = \overline{AD} = \overline{BD}$, 且 $\angle BGA = \angle ADC$.

再看 ΔDBE 與 ΔGBE ，因為 $\overline{BD} = \overline{BG}$, $\angle DBE = \angle GBE = 45°$, 且 $\overline{BE} = \overline{BE}$,

所以 $\Delta DBE \cong \Delta GBE$($ASA$ 全等)，於是

$$\angle BDE = \angle BGE = \angle BGA = \angle ADC.$$

111 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

（ｉ）真數 $\frac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}>0$ 恆成立，但 $x^2-x+1>0$ 恆真

$\therefore x^2+ax+2>0$ 恆成立$\Rightarrow$ 判別式 $D=a^2-8<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ ……(1)

（ｉｉ）不等式 $\log_{0.5}\frac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}>\log_{0.5}3$ 恆成立

$\Leftrightarrow \frac{x^2+ax+2}{x^2-x+1}<3$ 恆成立 $\Leftrightarrow 3(x^2-x+1)>x^2+ax+2$ 恆成立

$\Leftrightarrow 2x^2-(3+a)x+1>0$ 恆成立$\Rightarrow$ 判別式 $(3+a)^2-8<0$

$\Leftrightarrow -3-2\sqrt{2}<a<-3+2\sqrt{2}$ ……(2)

取(1)(2)交集得 $-2\sqrt{2}<a<-3+2\sqrt{2}$

二、【解】

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 考慮

$\left|z^2+z-6\right|^2=\left|z+3\right|^2\left|z-2\right|^2$,

$\left|z+3\right|^2=(\cos\theta+3)^2+\sin^2\theta=10+6\cos\theta,$

$\left|z-2\right|^2=(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta=5-4\cos\theta$

因此 $\left|z+3\right|^2\left|z-2\right|^2=(10+6\cos\theta)(5-4\cos\theta)$

$$=-24\cos^2\theta-10\cos\theta+50$$

$$=-24(\cos\theta+\frac{5}{24})^2+50+\frac{25}{24}$$

當 $\cos\theta=-\frac{5}{24}$ 時，$\left|z+3\right|^2\left|z-2\right|^2$ 有最大值 $50+\frac{25}{24}=\frac{1225}{24}$

因此 $\max_{z\in D}\left|z^2+z-6\right|=\sqrt{\frac{1225}{24}}=\frac{35}{2\sqrt{6}}=\frac{35}{12}\sqrt{6}$

三、【解】

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，可求得$(a_2,\ b_2)=(3,\ \sqrt{3}-1)$

$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，可求得$(a_3,\ b_3)=(1,\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$

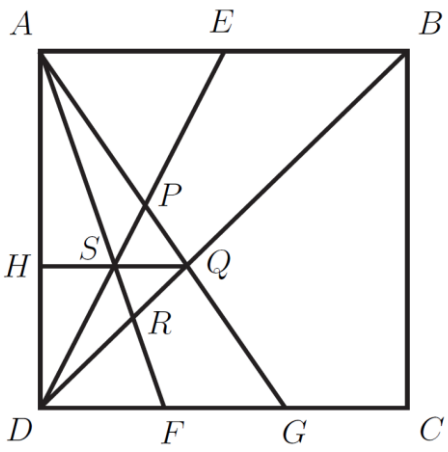
$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，可求得$(a_4,\ b_4)=(2,\ \sqrt{3}-1)$

$$(a_5,\ b_5)=(1,\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$$

可推論$(a_{2022},\ b_{2022})=(2,\sqrt{3}-1)$

四、【解】

如右圖，連接$\overline{SQ}$，並將它延長至與$\overline{AD}$相交為H.



可證$\overline{HQ}$與$\overline{AB}$還有$\overline{CD}$平行。

(A)假設$\overline{HS}=\overline{SQ}=x,\ \overline{AH}=y,\ \overline{HD}=6-y.$

利用$\Delta AHS\sim\Delta ADF$(AA相似)得到$\frac{y}{x}=\frac{6}{2}$,

由$\Delta DHS\sim\Delta DAE$(AA相似)得到$\frac{6-y}{x}=\frac{6}{3}$,

於是$6x=2y=3(6-y)$ 解得

$\overline{AH}=y=\frac{18}{5},\overline{HD}=6-y=\frac{12}{5}$，以及$x=\overline{HS}=\overline{SQ}=\frac{6}{5}.$

(B)梯形$SQGD$ 的面積為$\frac{(\frac{6}{5}+4)\frac{12}{5}}{2}=\frac{156}{25};$

而梯形$QSAB$ 的面積為$\frac{(\frac{6}{5}+6)\frac{18}{5}}{2}=\frac{324}{25}.$

(C)假設ΔPSQ的面積為A_1利用$\Delta PSQ\sim\Delta PDG$(AA相似)得到

$$\frac{A_1}{A_1+\frac{156}{25}}=\frac{(\frac{6}{5})^2}{4^2}\Rightarrow A_1=\frac{108}{175}.$$

(D)假設ΔRSQ的面積為A_2利用$\Delta RSQ\sim\Delta RAB$(AA相似)得到

$$\frac{A_2}{A_2+\frac{324}{25}}=\frac{(\frac{6}{5})^2}{6^2}\Rightarrow A_2=\frac{27}{50}.$$

(E)因此 $PQRS$ 面積為 $A_1+A_2=\frac{81}{70}$.

五、【解】

解: 首先， $12^3=1728$.

令 $\sqrt[3]{1733.1}=12+a,\ a>0.$

則 $1733.1=(12+a)^3=1728+3\times144a+3\times12a^2+a^3$ ，

∴ $5.1=f(a),$ 其中 $f(a)=432a+36a^2+a^3.$

因為 $f(0.012)>5.1$ 且 $f(0.0115)<5.1$

所以 $a\approx0.012$，$\sqrt[3]{1733.1}$ 約為 12.012。

六、【解】

虛竹成為駙馬的機率為 $\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{1}{9}=\frac{217}{729}.$

假設慕容復每次答對的機率為 p ，則他成為駙馬爺的機率為 $p+(1-p)p$.

所以 $p+(1-p)p>\frac{217}{729}$

⇨ $729p^2-1458p+217<0$

⇨ $0.1619<p<1.8381$

因此，慕容復每次答對的機率至少要 0.17，他當選的機率才會超過虛竹。

七、【解】

若 $abcdefgh$ 被 11 整除，$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

由 $10=-1(\text{mod}11), 10^k=(-1)^k(\text{mod}11),$

得 $a+c+e+g-(b+d+f+h)\equiv 0(\text{mod}11)$

所以 $(a+c+e+g)-(b+d+f+h)=11k$ -(1)

$(a+c+e+g)-(b+d+f+h)=\sum_{i=1}^{8} i=36$ -(2)

由(2)知：$a+c+e+g,\ b+d+f+h$ 同奇，同偶

由(1)知：$(a+c+e+g)-(b+d+f+h)=0\ or\ 22$ -(3)

解(2)(3)得 $a+c+e+g=b+d+f+h=18$

考慮分解有 8 的計有 1278 (配 3456),

1368 (配 2457),

1467 (配 2358),

1458 (配 2367).

所以 $\{a,c,e,g\}$ 有 8 種可能。

因此共計有 $8\cdot 4!\cdot 4!=8\cdot 24\cdot 24=4608$

111 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）

注意事項：

(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共四題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答

一、 若 a、b、c、d、e 均是正數，滿足 $abcde=1$，試證明

$$\frac{a^2+1}{a+1}+\frac{b^2+1}{b+1}+\frac{c^2+1}{c+1}+\frac{d^2+1}{d+1}+\frac{e^2+1}{e+1}\geq 5$$

二、 在 ΔABC 中，$\angle A$ 與 $\angle B$ 皆為銳角，如果 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin C$，試求 $\angle C$ 的度數。

三、 已知 $x\leq 0$ 且 $x^2+(y-2)^2=1$，試求 $\dfrac{3x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2}{x^2+y^2}$ 的最大值及最小值。

四、 已知 a,b,c 為 $x^3+3x^2-2x-1=0$ 的三個解，試證:

$$\frac{a^{111}+b^{111}}{a+b}+\frac{b^{111}+c^{111}}{b+c}+\frac{a^{111}+c^{111}}{a+c}$$ 必為一個整數。

111 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）

注意事項：

(1)作答時間：1 小時。不可使用電算器。

(2)本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3)請將答案及演算結果依序寫在答案卷上。

(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5)需使用黑色或藍色筆作答

一、已知方程式 $x^3+5x^2+7x+13=0$ 的解為 a,b,c，且方程式 $x^3+rx^2+sx+t=0$的解是$a+b,\ b+c,\ c+a$，則 $r+2s+3t$之值為_____。

二、試求 $2\log\sin 18^\circ+\log(1+\sin 18^\circ)$ 之值為_____。

三、已知ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且$\angle B$的角平分線交$\overline{AC}$於$D$點，且$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，$\angle A$的度數為_____。

四、若$x\geq 1, y\geq 1,$ 且 $(\log x)^2+(\log y)^2=\log(10x^4)+\log(10y^4)$，則 $\log(xy)$的最大值為_____及最小值為_____。

五、設x,y為介於 -1 和 1 之間的實數，如果$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=1$，則 x^2+y^2+7 之值為_____。

六、令$d(n)$代表正整數n所有正因數的和，例如$d(12)$=1+2+3+4+6+12=28，則滿足$d(n)=120$的所有n值為_____。

【口試題】令Q^+為正有理數集，已知函數$f: Q^+ \to Q^+$且有$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y^3}$。

若 $f(3) = a$且$f(7) = b$，試求$f(189)$之值。

【口試題】對任意自然數 k，令 $a_k = 1 + \frac{1}{k^2}$ 。試證明:

$\prod_{k=1}^{2022} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{2021} \times a_{2022} < 4$ 。

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　筆試（一）　編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

一、設整數 a 使得方程式 $2a-\sqrt{ax(ax+\sqrt{8})+2}=\sqrt{66-8\sqrt{8}}$ 有整數解，求 a 的所有可能值為何?

二、設 $x^2+2x-2=0$ 的二根也為 $x^4-2ax^2+b=0$ 的根。求 a，b 之值為何？

三、將 1, 2, 3, …, 100 排成一排，使得每個數都嚴格大於排在他前面的任何數，或是嚴格小於排在他前面的任何數(例如:將 1, 2, 3 排成一排為 (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), …)。請問有多少種排列方式?

(給予的答案須予以證明)

四、求最小的正整數n $(n>24)$，使得$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n+1}$為完全平方數。

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷(試題)

南區（高雄區）　　筆試（二）　　編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共 7 題，每題 3 分滿分 21 分。

(3)不可使用電算器。

(4)將答案填入前面之答案欄內。

(5)答案卷(試題)及計算紙須一同繳回。

填充題答案欄:

1._____　　2._____　　3._____

4._____　　5._____　　6._____

7._____

1. 已知$f(x)=x^2+(\log a+3)x+\log b$，$f(-1)=-3$，若對所有實數$x$，$f(x)\geq 3x$均成立，求 $a+b=$_____

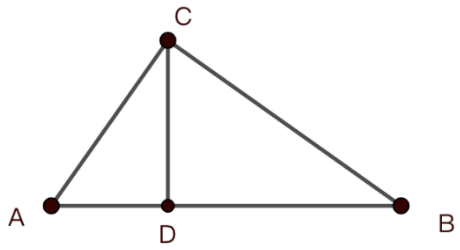
2. 設a,b均為實數，已知 $(x^3+2x^2+ax-5)(x^3-a^2x+2)(2x^2+b)=a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$，且 $a_8+a_6+a_4+a_4+a_0=a_7+a_5+a_3+a_1$，求$a$，$b$ 之值為_____

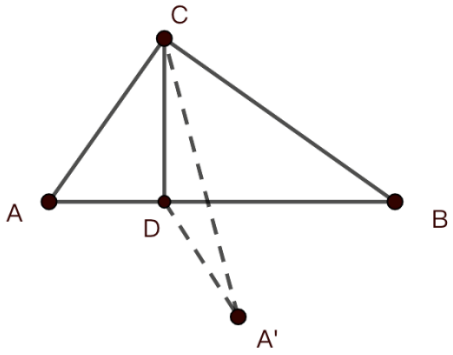
3. 已知 $a^2-b^2=6$，$(a-b)^2=4$，求 $a^2+b^2=$ _____

4. 求 $\frac{x^4-3x^2+5}{(x^2-1)^2}$ $(x\neq\pm1)$的最小值為_____

5. a,b,c,d,e,f,g 為連續且遞增的正奇數，已知$a+b+c+d+e+f+g$ 為完全平方數，$b+c+d+e+f$ 為完全立方數，求a 的最小值為_____

6.如左圖，有一個直角三角形紙片 ABC，角 ACB 為直角。在 AB 邊上取一點 D 使得 CD 為 AB 邊上的高，且 $BD=2AD$。如右圖，將紙片沿著 CD 邊折起，讓兩個面夾 60 度。此時三角型紙片上點 A 的位置為A'，令角$A'CB=\alpha$，則$\cos\alpha$ = _____





7. 設 a,b,c,d 為正整數，且滿足$a^5=b^2$，$c^4=d^7$ 及 $d-a=31$，求 $c-a=$_____

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(一) 編號: _____

注意事項:

(1)時間分配:2 小時

(2)本試卷共四題,滿分 49 分第一題 12 分,第二題 12 分,第三題 12 分,第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

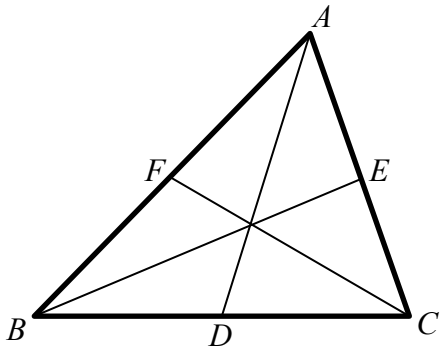
(5)試題與答案卷一同繳回。

一、令 $w+2x+3y+4z\geq 30$，試證 $\log(w^2+x^2+y^2+z^2)\geq \log 3+\log 10$

二、(1) 在平面上找六個點，使得可以用這六個點連出 11 條平行 X 軸、垂直 X 軸、斜率為 1 或-1 的直線。

(2) 證明無法在平面上找六個點，使得可以用這六個點連出至少 12 條平行 X 軸、垂直 X 軸、斜率為 1 或-1 的直線。

三、如下圖所示，$\triangle ABC$ 的三條中線分別為 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$。 若 $\triangle ABC$ 的面積為 1 則以 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 的長度為三邊長的三角形的面積等於 _____。



四、矩陣運算規則$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}$，$A+B=\begin{bmatrix}a+p & b+q\\ c+r & d+s\end{bmatrix}$，$AB=$

$\begin{bmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{bmatrix}$

設 $A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$。

(1) 若 $A^3=aI_2$ ，其中 a 為實數且 $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則 $a=$ _____ 。

(2) $A+A^4+A^7+\cdots\cdots+A^{100}=$ _____ 。

111 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

第 5 區(屏東高中) 筆試(二) 編號: _____

注意事項:

(1)時間分配 1 小時

(2)本試卷共四題, 滿分 21 分第一題 5 分, 第二題 5 分, 第三題 5 分, 第四題 6 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

五、題組

(1) 證明無法將一個正三角形分割為 2、3 或 5 個正三角形。

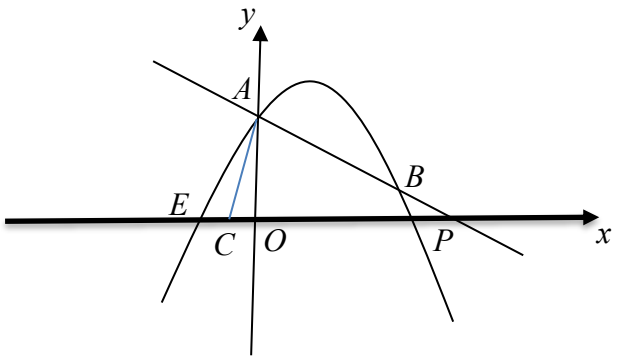
(2) 設n為正整數。證明若$n=4$或$n\geq 6$，則可將一個正三角形分割為n個正三角形。

六、如下圖，在平面直角坐標系中，直線 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 交 x軸於點P，交 y軸於點A。

拋物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的圖形通過點$E(-1,0)$，並與直線相交於A、B兩點。

(1) 求拋物線的方程式;

(2) 若點M在坐標軸(x 軸 或 y 軸)上使得 $\overline{AM}\perp\overline{BM}$，試求點$M$的座標。



七、令 n 為任意大於1的整數，T為所有n^2的因數和，k為n^2的因數的個數，試證 $T>kn$。

八、令 a,b,c,d 為正實數且 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$，試證

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+cd}+\frac{1}{1+da}\geq 2$$

【口試題】

問題：已知$6! = 8 \times 9 \times 10$，試求出所有的正整數$n$，使得$n!$能表示為$n-3$個連續正整數之乘積。

【口試題】

a）令 $a \geq 0, b \geq 0$，試證 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$

b）令 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$，試證 $abcd \leq (\frac{a+b+c+d}{4})^4$

c）令 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ 且 $a+b+c+d=1$，試證 $3abcd \leq ab+bc+cd+da$

拾、會議紀錄

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽數學科決賽

第一次成績審查會議暨口試試務會議紀錄

開會日期：111 年 12 月 16 日(星期五) 下午 19：00～21：15
開會地點：燕巢校區致理大樓 6 樓 615 會議室
主席：李俊憲主任　　紀錄：林治宏
出席委員：游森棚、林延輯、陳界山、郭君逸、蕭守仁、杜子明、
廖本煌、黃必祥、陳振遠、杜威仕、林盈甄、賴欣豪、
左太政、葉均承、何忠益

案由：本競賽筆試成績已評閱完畢，擬請推薦參加口試名單，提請討論。

說明：1. 依 111 學年度高級中學數學能力競賽決賽實施計畫，擬依筆試(一)(二)成績擇優 22~25 位同學參加下一階段的口試。
2. 筆試(一)(二)成績如附件。
3. 訂定口試成績評分標準。

決議：1. 確認筆試(一)(二)最後成績達 31 分以上，並依成績高低錄取前 24 名同學參加下一階段的口試，錄取參加口試學生之競賽編號如下：
11128、11123、11109、11118、11107、11136、11111、11141、11142、11151、11124、11102、11116、11134、11131、11112、11127、11129、11147、11146、11113、11133、11144、11140
2. 口試分 A、B、C 三組同時進行，授權籌備小組編排。
3. 口試成績評分標準：口試題共兩題、滿分 30 分，每題最高 15 分，每題最低評分為 8 分，原則如下：
(1) 不需提示可解出答案，依考生的解題品質及表達能力，每題評分 12～15 分。
(2) 需提示而解出答案，依考生解題的完整性、態度及表達能力，每題評分 10～12 分。
(3) 經提示仍無法解出答案，依考生的學習態度及表達能力，每題評分 8～10 分。

臨時動議：無

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科

能力競賽數學科決賽

第二次成績審查會議紀錄

開會日期：111 年 12 月 17 日(星期六) 下午 14：30～15：45
開會地點：燕巢校區致理大樓 6 樓 615 會議室
主席：李俊憲主任　　紀錄：林治宏
出席委員：游森棚、林延輯、陳界山、郭君逸、蕭守仁、杜子明、
廖本煌、黃必祥、陳振遠、杜威仕、林盈甄、賴欣豪、
左太政、葉均承、何忠益

案由一：本競賽全部成績已評閱完畢，擬請確認成績及獲獎名單，提請討論。

說明：1. 依 111 學年度高級中學數學能力競賽決賽實施計畫，本競賽之計分方式：筆試(一)占 35%、筆試(二)占 35%、口試占 30%。

2. 筆試(一)(二)及口試成績如附件。

3. 預計頒發一等獎 3 人(獎金 15000 元)、二等獎 7 人(獎金 10000 元)、三等獎 10 人(獎金 7500 元)，獲得前三等獎學生之指導教師由教育部國民及學前教育署發給獎狀。

決議：1. 筆試(一)(二)及口試總成績達 82 分以上者，計有以下 3 位，每位可獲一等獎及獎金 15000 元：
11128、11123、11109

2. 筆試(一)(二)及口試總成績達 70 分以上者，計有以下 7 位，每位可獲二等獎及獎金 10000 元：
11118、11107、11136、11111、11116、11141、11151

3. 筆試(一)(二)及口試總成績達 55 分以上者，計有以下 10 位，每位可獲三等獎及獎金 7500 元：
11102、11124、11142、11134、11131、11112、11127、11129、11144、11146

4. 獲得前三等獎學生除獎金外，本人及指導教師均可獲教育部國民及學前教育署獎狀一紙。

案由二：擬請推薦參加 2023 年亞太數學奧林匹亞研習營或資優營建議名單，提請討論。

說明：1. 依 111 學年度高級中學數學能力競賽決賽實施計畫，本主辦單位得推薦獨立研究成績優異的同學參加 2023 年亞太數學奧林匹亞研習營或資優營，筆試(一)(二)及口試總成績如附件。

2. 獨立研究(一)(二)成績如附件。

決議：1. 除前三等獎獲獎同學外，符合以下條件之一的同學可獲推薦參加 2023 年亞太數學奧林匹亞研習營或資優營：

(1) 總成績達 49 分以上者。

(2) 獨立研究成績達 17 分以上者。

2. 共計有以下 4 位同學獲得推薦參加 2023 年亞太數學奧林匹亞研習營：11147、11133、11140、11113

3. 共計有以下 5 位同學獲得推薦參加 2023 年亞太數學奧林匹亞資優營：11104、11121、11126、11137、11135

臨時動議：無

附件一、報到通知單

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽**數學科**決賽 **報到通知單**

一、競賽日期:111 年 12 月 16 日（星期五）至 111 年 12 月 17 日（星期六）

二、報到時間:111 年 12 月 16 日（星期五）11:00～11:40

三、報到地點:國立高雄師範大學 燕巢校區 致理大樓 8 樓 803 演講廳
（地址:高雄市燕巢區深中路 62 號）

四、報到時應攜帶之物品：

（一）本報到通知單

（二）學生證、國民身分證

（三）其他個人物品：

1. 全民健保卡
2. 個人盥洗用品、衛生紙、藥品、雨具、換洗衣物、禦寒衣物及水杯等（可自備餐具）
3. 圓規、直尺、筆等作答文具用品，參考書籍及資料等

五、注意事項：

（一）敬請速填**學員資料表**（附件一）並於 111 年 12 月 2 日前**傳真或 email 回覆**本承辦單位，俾利辦理保險、訂餐、專車接送等相關事宜。

（二）競賽期間一律住宿**金獅湖大酒店**(高雄市三民區鼎金路 118 號)。

（三）筆試時請先將手機關機或電池取出後再進入試場，並嚴禁攜帶其他通訊器材入場。

（四）111 年 12 月 17 日 16:30~18:00 閉幕典禮歡迎師長參加，入場時間為 16:00~16:25。

（五）111 年 12 月 17 日閉幕後備有晚餐及返鄉專車接送學員由燕巢校區至高鐵左營站，預計於 19:00 發車，約 19:40 到達高鐵左營站，請自行斟酌回程時間訂票。

六、國立高雄師範大學交通狀況說明：

參見本系網站 https://dept.nknu.edu.tw/VB/zh/ 之本競賽專區。

七、本校燕巢校區大門口設有門禁管制，111 年 12 月 16 日報到及 111 年 12 月 17 日閉幕典禮前後，如有需要開車進入校園接送參賽學生者，請與門口警衛說明有子弟參加此競賽需要接送。

八、本校數學系聯絡方式：

電話: 07-7172930 轉 6800 李主任 or 轉 6801~6803 林先生、簡小姐、張小姐
傳真: 07-6051061 E-mail：s4108@mail.nknu.edu.tw

附件一

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽數學科決賽
學員資料表

<table>
<tr><td>編　　號</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>姓　　名</td><td colspan="2"></td><td>性　　別</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>出生年月日</td><td colspan="2"></td><td>身分證字號</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>連絡電話</td><td colspan="2"></td><td>電子郵件信箱</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>法定代理人姓名
＊辦理保險用</td><td colspan="2"></td><td>關係</td><td>饌食</td><td colspan="2">□葷 / □素
未註明者以葷食計</td></tr>
<tr><td>戶籍住址
＊辦理保險用</td><td colspan="6">市　區　里　路　巷　號
縣　鎮／鄉　鄰　街　弄　樓</td></tr>
<tr><td rowspan="3">就讀學校</td><td colspan="4"></td><td>年級</td><td></td></tr>
<tr><td>學校地址</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>教務處連絡電話及傳真</td><td colspan="3"></td><td colspan="2">Fax:</td></tr>
<tr><td>指導老師</td><td colspan="2"></td><td>連絡電話</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>緊急事件
連絡人</td><td>姓名</td><td></td><td>電話
手機</td><td></td><td>關係</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">搭車情形</td><td>來校方式</td><td colspan="5">□自行前往燕巢校區。
□需要貴校派車接送：於<u>高鐵左營站</u>等侯搭乘貴校專車接送至燕巢校區。</td></tr>
<tr><td>說明</td><td colspan="5">111 年 12 月 16 日搭乘本校專車之集合時間及地點：
高鐵左營站：於上午 10:00 前集合並於 10:20 準時發車。
➢地點 - 由 2 號出口出站並搭電扶梯下至 1 樓的彩虹市集前廣場
※ 因遊覽車於高鐵左營站不能久停，故逾時不侯。</td></tr>
<tr><td>回程方式</td><td colspan="5">□自行由燕巢校區出發返家。
□需搭貴校專車：至<u>高鐵左營站</u>下車後再由親友或師長接送或自行搭車返家。</td></tr>
<tr><td>說明</td><td colspan="5">返鄉專車訂於 111 年 12 月 17 日晚上 19:00 由本校燕巢校區發車，預計：約於 19:40 抵達高鐵左營站。
※ 因適逢假日，請自行斟酌回程時間訂票。</td></tr>
<tr><td colspan="2">其他說明欄</td><td colspan="5">□因事無法參加本競賽活動
□ _____</td></tr>
<tr><td colspan="2">備　　註</td><td colspan="5">1.以上已填之資料係依據各區報名資料繕造；如資料有誤，請逕予更正，
未填寫之部分請務必補齊（指導教師欄位只需填寫，不需親自簽名）
2.如有與承辦單位之連絡事項，請填寫上欄之「其他說明欄」。</td></tr>
</table>

※ 請務必於 111 年 12 月 2 日前填妥並傳真或 E-MAIL 回覆

承辦單位：國立高雄師範大學數學系　　電話：(07)7172930 轉 6801

連絡人：林先生　　傳　真: (07)6051061　　email: s4108@mail.nknu.edu.tw

附件二、學員生活須知及競賽規範

學員生活須知

一、晚點名時間：12 月 16 日－21:30

二、早起床時間：12 月 17 日－06:15

金獅湖大酒店發車時間：12 月 17 日－07:20

三、膳食： (一)用餐地點：第二天早餐在金獅湖大酒店（出發前用畢）

兩日午晚餐在國立高雄師範大學數學系（致理大樓）

(二)用餐時間：(詳見競賽程序表)

四、住宿：

(一) 學員一律住宿高雄市金獅湖大酒店（附早餐），並請遵守金獅湖大酒店住宿須知之規定。

(二) 各房間提供鑰匙一把（原則上由名冊中每一房第一位學員負責保管，各房可自行協調保管者），請善盡保管責任，並於退房時交予輔導員收齊。

(三) 浴室內備有垃圾筒，盥洗時之廢棄香皂、雜物、包裝紙等，請務必投入垃圾筒中，以維護水管暢通及環境整潔。

五、服務：

(一) 男、女輔導員之房號當日宣布。

(二) **住宿期間如有身體不適或有任何問題、困難**，請告知**輔導員**。

輔導員：顏冠粼、黃鉦文、廖紫雲、李其庭、羅允澤、高新雄

六、注意事項：

1. 住宿期間不得擅自外出，以免發生危險。
2. 師長及親友之探訪或緊急事務聯絡，請透過輔導員處理。
3. 相關行程因執行情況而有變動時，請依循承辦單位通知辦理。
4. 規章未盡事宜由評審委員會決議之。

七、相關聯絡電話、地址（請見學員證背面）：

國立高雄師範大學：燕巢校區：82444 高雄市燕巢區深中路 62 號

（和平校區：80201 高雄市苓雅區和平一路 116 號）

本校**總機： 07-717-2930**

數學系主任室： 07-717-2930 轉 6800、6813

辦公室： 07-717-2930 轉 6801、6802、6803

FAX: 07-605-1061 E-mail: s4108@mail.nknu.edu.tw

警衛室(燕巢大門口)： 07-717-2930 轉 6119

學員競賽規範

一、競賽場地

（一） 除住宿地點外，活動場所都在本校燕巢校區致理大樓數學系（6~8 樓）。

（二） 活動範圍限制在本校燕巢校區內；如須離開，必須報備核准後才能離開。

（三） 參賽學生必須全程參加 2 天的活動；為求公平，學生不得中途離營，如有必要得檢附證明文件及家長或學校同意書，否則得取消其競賽成績及參賽資格。

（四） 競賽期間不可使用手機或其他通訊器材，違反規定者提競賽評審委員會討論處置。

（五） 請參賽學生務必注意身體狀況；如有身體不適，請隨時告知輔導員。

（六） 請在學員識別名牌內放入學生證(或身份證、健保卡)，以利評審查驗身份。

（七） 如因疫情因素影響，本承辦單位將依疫情指揮中心之規範作適度調整賽程。

（八） 因應新冠肺炎疫情，請所有參與競賽之參賽學生、領隊教師或家長、評審委員及工作人員進入校門時應主動出示個人證件、佩戴口罩、配合量測體溫，並於報到時填繳健康聲明書。

二、競賽規範

競賽內容分四大項：筆試(一)(二)、口試、獨立研究(一)(二)及成果評鑑。

（一） 第一天：筆試(一)(二)共占競賽成績 70%；預計選出約 24 位學生參加口試。

- 作答時請注意內容的正確性、完整性及嚴謹性。例如：利用不是大家熟悉的定理、公式或不等式來推導你的結果時，就必須證明出你引用的性質。
- 建議學生在筆試結束後相互交流，並鼓勵討論筆試作答心得及解法。
- 如未攜帶圓規、直尺等作答文具，請向工作人員登記借用。

（二） 第二天：有入選參加口試的學生，其口試占競賽成績 30%。口試有兩道試題，學生先在預備教室紙筆作答 20 分鐘；再由工作人員引導至口試教室口試。

- 除口試外，上午時間學生一律作答獨立研究(一)(二)；獨立研究每次各 3 題，可選其中 2 題作答。獨立研究不占競賽成績，僅供評審委員推薦參加 APMO 或資優營之參考依據。
- 成果評鑑時間，將安排 6~8 位學生上台演示其解法及解題心得。
- 請獲獎同學記得繳回領據；閉幕典禮後，提供專車到高鐵左營站。