陸、 筆試試題及參考解答

112 學年度普通型高級中學數學科能力競賽（決賽）

筆試（一）試題卷

編號：_____（學生自填）

注意事項：

(1). 時間：2 小時（13:30~15:30）
(2). 配分：每題皆為 7 分
(3). 不可使用計算器
(4). 請將答案依序寫在答案卷內
(5). 學生自評預估得分（每題 0~7 分）

一、 設$f(x)$是定義在正整數集上，取非負整數值的函數，且對所有的m,n有

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ 或 } 1$$
$$f(3)=0\,,f(4)>0\,,f(10000)=2500$$

求$f(9996)$與$f(2023)$。

二、 空間上有任意3點不共線的點2023個，把它們分成40組且每組的點數都不相同，在任意3個不同的組中各取一點作為三角形的三頂點，為使三角形的總數最大，求各組中的點數分別要為多少?

三、 設點E是正方形$ABCD$外一點使得△CDE為銳角三角形，且$\overline{CE}\neq\overline{DE}$，在△$CDE$的外側作兩個三角形△$CEF$和△$DEG$使得$\angle CEF=\angle DEG=90°$，$\angle ECF=\angle EDG$。已知$\overline{AF}=\overline{BG}$，試求$\angle ECF$=?

112 學年度普通型高級中學數學科能力競賽（決賽）

筆試（二）試題卷

編號：＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1). 時間：2 小時（16:00~18:00）
(2). 配分：每題皆為 7 分
(3). 不可使用計算器
(4). 請將答案依序寫在答案卷內
(5). 學生自評預估得分（每題 0~7 分）

一、 找出所有讓$\frac{2a^2+b^2}{a+2b}$是整數的互質正整數對(a,b)。

二、 $f(x)$是一個實數值函數，滿足$f(-1)=\sqrt{3}$，當$x<0$時$f(x)>1$，且對於任意實數x和y，有$f(x+y)=f(x)f(y)$。數列$\{a_n\}$則滿足$a_1=f(0)$，$a_2=f(-2)$，且$f(a_{n+2})=\frac{f((n+3)a_{n+1})}{f((n-2)a_n)}$。求出所有正整數$n$，使得$a_n$是 11 的倍數。

三、 試求出最大的正整數N使得可將集合$\{1,2,3,\ldots,N\}$分為兩個不相交的非空子集合A與B，使得A中任意 10 個數$x_1,x_2,\ldots,x_{10}$(不要求它們互不相同)的和都不在A之中，且B中任意 10 個數$y_1,y_2,\ldots,y_{10}$(不要求它們互不相同)的和都不在B之中。

筆試參考解答

題目：設$f(x)$是定義在正整數集上，取非負整數值的函數，且對所有的m、n有

$f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ 或 1

$f(3)=0, f(4)>0, f(10000)=2500$

求$f(9996)$與$f(2023)$

解析	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編號	筆試（一）1

解答：(1)求$f(2)$與$f(1)$

因為$f(3)-f(2)-f(1)=0$ 或 1 且$f(3)=0$

所以$f(2)+f(1)=0$ 或 -1

因$f(2)\geq 0, f(1)\geq 0$　故$f(2)+f(1)=0\rightarrow f(1)=f(2)=0$

（2）求$f(4)$

因為 $f(4)-f(3)-f(1)=0$ 或 1

又$f(4)>0, f(1)=f(3)=0\rightarrow f(4)=1$

（3）證明：$f(4n)\geq n$

用數歸法，n=1 成立

若 n=k 成立，則$f(4k)\geq k$

則$f(4(k+1))-f(4k)-f(4)=0$ 或 1

$f(4(k+1))=f(4k)+f(4)+0$ 或 $1\geq n+1$

（4）$f(10000)=f(9996)+f(4)+0$ 或 1 且$f(10000)=2500$ ， $f(4)=1$

故$f(9996)=2499$ 或 2498

但$9996=4\times 2499\rightarrow f(9996)\geq 2499$

故 $f(9996)=2499$

以此類推得 $f(4n)=n, 1\leq n\leq 2500$

（5）$f(2023)=f(2020)+f(3)+0$ 或 $1=505$ 或 506

$2023=f(4\times 2023)\geq 4\times f(2023)$

$f(2023)\leq \frac{2023}{4}=505.75$

故$f(2023)=505$

筆試參考解答

題目：空間上有任意3點不共線的點2023個，把它們分成40組且每組的點數都不相同，在任意3個不同的組中各取一點作為三角形的三頂點，為使三角形的總數最大，求各組中的點數分別要為多少?

解析				
	類　　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　□ 改編於：大陸競賽試題		
	難 易 度	□ 難　□ 中等　■ 易	編 號	筆試（一）2

解答：

設40組中的點數分別為$n_1 < n_2 < \cdots < n_{40}$

故三角形的總數為$S = \sum_{1\le i<j<k\le 40} n_i n_j n_k$，

$\sum_{i=1}^{40} n_i = 2023$，且具有一些性質

(1) $n_{i+1} - n_i \le 2$，$i = 1, 2, \ldots, 39$；

否則，存在一個i，使得$n_{i+1} - n_i \ge 3$，不失其一般性，令$i = 1$。

則 $S = n_1 n_2 \sum_{r=3}^{40} n_r + (n_1 + n_2)\sum_{3\le j<k\le 40} n_j n_k + \sum_{3\le i<j<k\le 40} n_i n_j n_k$

令$n_1^* = n_1 + 1$，$n_2^* = n_2 - 1$，故$n_1^* n_2^* > n_1 n_2$，

將n_1^*, n_2^*帶入S中，將使S變大(矛盾)

(2) $n_{i+1} - n_i = 2$的i值至多1個；

否則，若有i及j，$1 \le i < j \le 39$，使得$n_{i+1} - n_i = 2$，$n_{j+1} - n_j = 2$

令$n_i^* = n_i + 1$，$n_{j+1}^* = n_{j+1} - 1$，將n_i^*, n_{j+1}^*帶入S中，將使S變大(矛盾)

因為 $(r-19) + (r-18) + \cdots + r + (r+1) + \cdots + (r+20) = 40r + 20$，

故應恰好有一個相鄰兩組其點數差為2。

設$n_j = a + j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, i$； $n_j = a + j$, $j = i+1, , i+2, \ldots, 40$

所以 $\sum_{j=1}^{i}(a + j - 1) + \sum_{j=i+1}^{40}(a + j) = 2023$

$40a - i = 1193$，解得 $i = 37$, $a = 31$

(31, 32, …, 67, 69, 71)

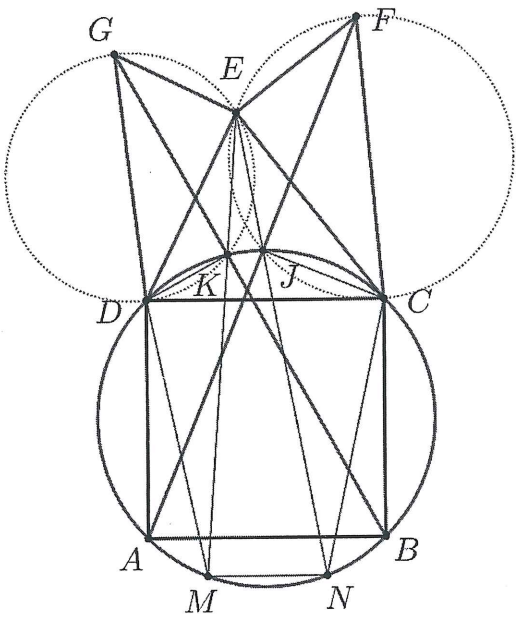
筆試參考解答

題目：

設點E是正方形$ABCD$外一點使得△CDE為銳角三角形，且$\overline{CE} \neq \overline{DE}$，在△$CDE$的外側作兩個三角形△$CEF$和△$DEG$使得$\angle CEF = \angle DEG = 90°$，$\angle ECF = \angle EDG$。已知$\overline{AF} = \overline{BG}$，試求$\angle ECF = ?$

解析				
	類　　型	□ 代數(A)　□數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編號	筆試（一）3

解答：設ω是正方形$ABCD$的外接圓。AF, BG分別與ω再交於點J, K．EJ, EK分別與ω再交於點N, M.



1．因$\angle CJF = \angle CBA = 90° = \angle CEF$，$C, E, F, J$共圓。同理$D, E, G, K$共圓。

2．因

$$\angle FAC = \angle JAC = \angle JNC,$$
$$\angle CFA = \angle CFJ = \angle CEJ = \angle CEN,$$

$\Delta ACF \sim \Delta NCE$，所以得$EN : AF = CE : CF$。

同理$EM : BG = DE : DG$。

因$\Delta CEF \sim \Delta DEF$，$CE : CF = DE : DG$。由已知$AF = BG$得$EM = EN$。

3．因

$\angle ABN = \angle AJN = \angle FJE = \angle FCE$

$= \angle EDG = \angle EKG = \angle MKB = \angle MAB$

若M, N相異，則得$MN \square AB$。

但$EM = EN$，E是在AB的中垂線上，得$ED = EC$與已知不合。所以M, N重合及J, K重合。

所以得$\angle EJF = \angle ECF = \angle EDG = \angle EKG = \angle EJG$．因$\angle FJG = \angle AJB = \angle ADB = 45°$，得$\angle ECF = \angle FJG / 2 = 22.5°$.

筆試參考解答

題目：找出所有讓$\frac{2a^2+b^2}{a+2b}$是整數的互質正整數對(a,b)。

解析				
	類　　型	☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　　☐ 改編於：		
	難易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編號	筆試（二）1

解答：$S=\frac{2a^2+b^2}{a+2b}=2a+b-\frac{b(5a+b)}{a+2b}$，原問題等價於$a+2b|b(5a+b)$。注意到$a$一定是奇數，所以$a$和$2b$也互質，因此$\gcd(a+2b,2b)=1$，又可推得$\gcd(a+2b,b)=1$。原條件可化簡為$a+2b|5a+b$。

假設5不是b的質因數，則$\gcd(5a,b)=1$，故$\gcd(5a+b,b)=1$。如果$p|2a+b$和$p|5a+b$，則$p|5(a+2b)-(5a+b)=9b$，但$\gcd(p,b)=1$，所以$p|9$，p或者$a+2b$只可能是$1,3,9$。

如果$5|b$，則$\gcd(5a+b,b)=5$，最後結果也是$a+2b=1,3,9$。

$(a,b)=(1,1),S=1;(a,b)=(1,4),S=2;(a,b)=(3,3)$不互質；

$(a,b)=(5,2),S=6;(a,b)=(7,1),S=11$。所以解為$(a,b)=(1,1),(1,4),(5,2),(7,1)$。

筆試參考解答

題目：

$f(x)$是一個實數值函數，滿足$f(-1)=\sqrt{3}$，當$x<0$時$f(x)>1$，且對於任意實數x和y，有$f(x+y)=f(x)f(y)$。數列$\{a_n\}$則滿足$a_1=f(0)$，$a_2=f(-2)$，且$f(a_{n+2})=\frac{f((n+3)a_{n+1})}{f((n-2)a_n)}$。求出所有正整數$n$，使得$a_n$是 11 的倍數。

解析				
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	筆試（二）2

解答：

(1)當$x=-1,y=0$時，$f(-1)=f(-1)\times f(0)$，因此$a_1=f(0)=1$，且$a_2=f(-2)=f^2(-1)=3$。又$f(0)=f(-x+x)=f(-x)\times f(x)\Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

(2)當$x_1<x_2$時，$1<f(x_1-x_2)=f(x_1)\times f(-x_2)=\frac{f(x_1)}{f(x_2)}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$。因此，$f(x)$是遞減函數。

(3)由於

$$f(a_{n+2})=\frac{f((n+3)a_{n+1})}{f((n-2)a_n)}=f((n+3)a_{n+1}-(n-2)a_n)$$

且$f(x)$是遞減函數，可知

$$a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n-2)a_n$$

由此可得，

$$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=n+2\Rightarrow a_{n+1}-a_n=n(n-1)\times\ldots\times 3\times 2=n!$$

所以，

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1\\&=n!+(n-1)!+\cdots+2!+1\end{aligned}$$

具體來看，

$$a_1=1,a_2=3,a_3=9,a_4=11\times 3,a_5=153,a_6=873$$
$$a_7=5913,a_8=11\times 4203,a_9=409113,a_{10}=11\times 367083$$

加上易知當$n\geq 11$時，11 整除$n!$，結論：使滿足題目的有$n=4,8,10,11,12,13,\ldots$。

筆試參考解答

題目：

試求出最大的正整數N使得可將集合$\{1,2,3,\ldots,N\}$分為兩個不相交的非空子集合A與B，使得A中任意10個數$x_1,x_2,\ldots,x_{10}$(不要求它們互不相同)的和都不在A之中，且B中任意10個數$y_1,y_2,\ldots,y_{10}$(不要求它們互不相同)的和都不在B之中。

解析	類　　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 改編於：數學奧林匹克 高中版新版 競賽篇 P160		
	難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	編號	筆試（二）3

解答：

1. 假設可將集合$\{1,2,3,\ldots,109\}$分為兩個不相交的非空子集合A與B，使得A中任意10個數$x_1,x_2,\ldots,x_{10}$(不要求它們互不相同)的和都不在A之中，且B中任意10個數$y_1,y_2,\ldots,y_{10}$(不要求它們互不相同)的和都不在B之中。

設$1\in A$，則可知10個1之和$10\in B$。
故10個10之和$100\in A$。
若$11\in A$，則可知9個11與1個1之和$100\in B$，矛盾。
故$11\in B$，可知9個11與1個10之和$109\in A$，
另一方面，9個1與1個100之和$109\in B$，矛盾。
故不存在滿足如此條件的兩個不相交的非空子集合A與B。
可知所求的N必小於109。

2. 考慮$A=\{1,2,\ldots,9,100,101,\ldots,108\}$及$B=\{10,11,\ldots,99\}$。

考慮A中任意10個數$x_1,x_2,\ldots,x_{10}$(不要求它們互不相同)。
若這10個數皆在$\{1,2,\ldots,9\}$中，
則可知$10\le x_1+x_2+\cdots+x_{10}\le 90<100$，故$x_1+x_2+\cdots+x_{10}$不在$A$之中。
若有某數在$\{100,101,\ldots,108\}$之中，
則可知$x_1+x_2+\cdots+x_{10}\ge 9+100=109$，故$x_1+x_2+\cdots+x_{10}$不在$A$之中。
考慮B中任意10個數$y_1,y_2,\ldots,y_{10}$(不要求它們互不相同)。
則可知$y_1+y_2+\cdots+y_{10}\ge 100$，故$y_1+y_2+\cdots+y_{10}$不在$B$之中。
可知N的最大值為108。

柒、口試試題及參考解答

112學年度普通型高級中學數學科能力競賽（決賽）

口 試 試 題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1). 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；
(2). 攜帶本試卷到口試教室應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；
(3). 口試完成後由助理引導至 M716 教室，繼續作答獨立研究。

一、 平面上給定一個凸n邊形，其中n為大於或等於 4 的正偶數，而P為在該凸n邊形內部且不在任何一條對角線上的一個點。考慮由該凸n邊形之頂點所形成且包含P點的三角形，試證明這樣的三角形共有偶數個。

【解答】

二、 對於每個正偶數x，令$e(x)$為x的因數中2的最高次方的數，例如，$e(8) = 2^3 = 8$，$e(12) = 2^2 = 4$。對於任意正整數n，定義

$$S(n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} e(2k)$$

若正整數n小於1300且$S(n)$是一個完全平方數，求n的最大值。

【解答】

口試參考解答

題目：

平面上給定一個凸n邊形，其中n為大於或等於 4 的正偶數，而P為在該凸n邊形內部且不在任何一條對角線上的一個點。考慮由該凸n邊形之頂點所形成且包含P點的三角形，試證明這樣的三角形共有偶數個。

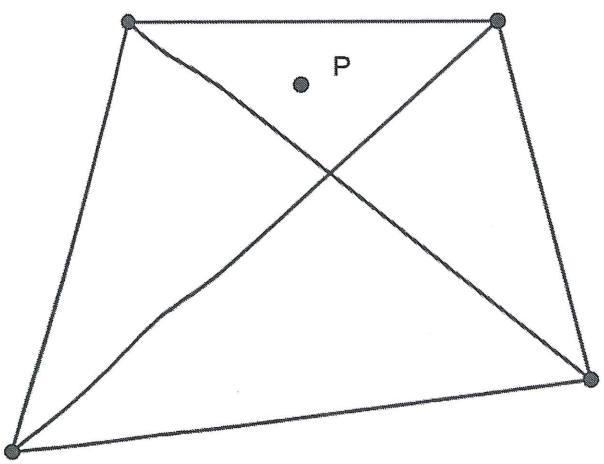
解析	類　　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 改編於：國際數學奧林匹克大陸隊訓練教材第一輯P196		
	難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編號	口試一

解答：

對每個包含P點的凸四邊形，皆可得到兩個包含P點的三角形。由該凸n邊形之頂點所形成的四邊形必為凸四邊形。設其中有m個四邊形包含P點，則可得出$2m$個三角形包含P點，但須討論重複計算的數量。

若P點包含於某 個三角形，則必包含於該三角形之頂點與其他任一個凸n邊形之頂點所形成的四邊形中。故每個包含P點的三角形均被重複計算了$n-3$次。所以包含P點的三角形共有$\frac{2m}{n-3}$個。

因$\frac{2m}{n-3}$為正整數且$n-3$為奇數，所以$n-3$整除m。故$\frac{2m}{n-3}=2k$必為偶數。



口試參考解答

題目：對於每個正偶數x，令$e(x)$為x的因數中2的最高次方的數，例如，$e(8)=2^3=8$，$e(12)=2^2=4$。對於任意正整數n，定義

$$S(n)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}} e(2k)$$

若正整數n小於1300且$S(n)$是一個完全平方數，求n的最大值。

解析	類　型	☐ 代數(A) ■ 數論(N) ☐ 幾何(G) ☐ 組合(C)		
	試題出處	☐ 自編 ☐ 改編於：美國數學競試		
	難易度	☐ 難 ☐ 中等 ■ 易	編號	口試二

解答：在2, 4, 6, …, 2^n中有2^{n-2}個被2整除而不被4整除，有2^{n-3}個被4整除而不被8整除，…，有2^0個被2^{n-1}整除而不被2^n整除，且僅有一個被2^n整除。$S(n)=2\cdot 2^{n-2}+2^2\cdot 2^{n-1}+\cdots+2^{n-1}\cdot 2^0+2^n=(n+1)2^{n-1}$，

n如果是偶數，則$(n+1)2^{n-1}$不可能成為完全平方數，因此n是奇數。

因為$(n+1)\leq 36^2$，所以n的最大值為1295

捌、獨立研究試題及參考解答

112學年度普通型高級中學數學科能力競賽（決賽）

獨立研究（一）試題卷

編號：_____（學生自填）

注意事項：

(1). 三題中**自選兩題**作答，並請將答案依序寫在答案卷內
(2). 時間：1.5小時（8:30~10:00）
(3). 配分：每題皆為7分
(4). 不可使用計算器

一、 有2023塊窗戶，每片窗戶上都塗有紅黃藍其中一個顏色，我們可以任意挑選兩塊不同顏色的窗戶，把顏色擦乾淨後，塗上第三種顏色。請證明無論開始時窗戶的顏色是怎麼分佈的，我們一定可以在有限步驟後，將所有窗戶都塗上同一種顏色。

二、 試找出一個正整數數列$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$，滿足每個數都大於1、兩兩互質，且對於任意$n$，$1 \le n \le 100$，$a_0 a_1 \ldots a_n - 1$都等於兩個連續正整數的乘積。（列出前四個數$a_0, a_1, a_2, a_3$以及規律即可，但需完整論證符合條件）

三、 在$x \neq 0$時，若實係數n次多項式滿足$f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$。證明：當$n$為正偶數時，存在多項式$g(x)$，滿足

$$f(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \left[g\left(\frac{n}{2}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right)\right]。$$

112學年度普通型高級中學數學科能力競賽（決賽）

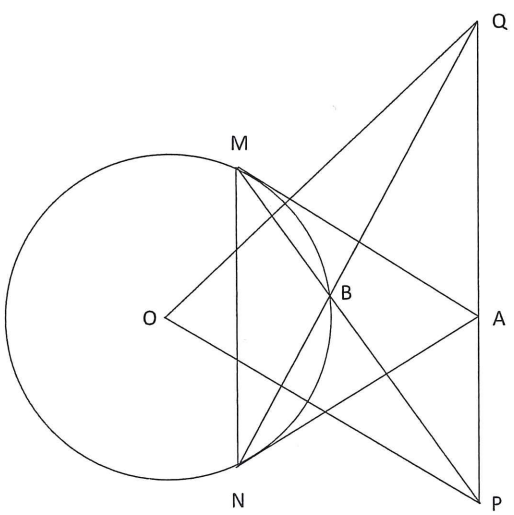
獨立研究（二）試題卷

編號：＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1). 三題中**自選兩題**作答，並請將答案依序寫在答案卷內
(2). 時間：1.5 小時（10:20~11:50）
(3). 配分：每題皆為 7 分
(4). 不可使用計算器

一、 下圖中，$\overline{AM},\overline{AN}$是圓$O$的切線，$M$和$N$是切點，$B$是劣弧$\widehat{MN}$上異於$M$、$N$的點。過點$A$平行於$\overline{MN}$的直線分別交直線$\overline{BM}$、$\overline{BN}$於點$P$和$Q$。若$\angle POQ = 60°$，並用$S(O)$和$S(\Delta OPQ)$分別表示圓$O$和三角形$OPQ$的面積，求$\frac{S(O)}{S(\Delta OPQ)} = ?$



【背面有試題】

二、 二維平面上的每個點都定義一個非零實數，其中有正也有負。且設d為任意的正實數。

(1). 證明平面上必存在距離為d的兩個點，其所對應的實數之乘積為正數。

(2). 證明平面上必存在距離為d的兩個點，其所對應的實數之乘積為負數。

三、 已知x, y, z皆為實數，且滿足聯立方程組

$$\begin{cases} x^2y + y^2z + z^2x = -1 \\ xy^2 + yz^2 + zx^2 = 5 \\ xyz = -2 \end{cases}$$

試求$x + y + z$之值。

獨立研究參考解答

題目：

有2023塊窗戶，每片窗戶上都塗有紅黃藍其中一個顏色，我們可以任意挑選兩塊不同顏色的窗戶，把顏色擦乾淨後，塗上第三種顏色。請證明無論開始時窗戶的顏色是怎麼分佈的，我們一定可以在有限步驟後，將所有窗戶都塗上同一種顏色。

解析				
	類　　型	□代數(A) □ 數論(N) □ 幾何(G) ■ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編 ■ 改編於： 1987年大陸東三省邀請賽		
	難易度	□ 難 ■ 中等 □ 易	編號	獨立研究（一）1

解答：

使用數學歸納法，證明只要是3m+1個窗戶，都可以有此結論。

m=0，顯然！

設結論在m=k時成立，當m=k+1（>1）時，令起始狀態的紅色有p個，黃有q個，藍有r個。不失一般性，可令 $0 \le p \le q \le r \le 3m+1$。

(1) 若 0<p，由假設可知，一開始的顏色分佈為p-1, q-1, r-1時，我們可以將顏色變為同一色，將剩下各一的三塊窗戶中，與前者的顏色不同的兩色擦乾淨，並塗上前者的顏色即可。

(2) 若 0=p<1<q，將一塊黃色與一塊藍色的窗戶改為紅色後，變為第一種例子。

(3) 若 0=p<1=q，將一塊黃色與一塊藍色的窗戶改為紅色後，再將一塊紅色與一塊藍色的窗戶改為黃色後，此時依然回到第一種例子。

(4) 若 0=p=q，則已經是一種顏色的狀況了。

獨立研究參考解答

題目：

試找出一個正整數數列$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$，滿足每個數都大於1、兩兩互質，且對於任意$n$，$1 \le n \le 100$，$a_0 a_1 \ldots a_n - 1$都等於兩個連續正整數的乘積。（列出前四個數$a_0, a_1, a_2, a_3$以及規律即可，但需完整論證符合條件）

解析	類　　型	☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　　☐ 改編於：		
	難易度	☐ 難　☐ 中等　■ 易	編號	獨立研究（一）2

解答：

(1)對於$n=1$，需要滿足$a_0 a_1 - 1 = m(m+1)$，其中m為一個正整數。可以選取$a_0 = 3, a_1 = 7$（或$a_0 = 3, a_1 = 9$等，有許多選擇）。

(2)接下來以歸納法描述找後續數列的方式。假設已經找到符合條件的前$n+1$個數（即$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$），則每個數都大於1、兩兩互質，且對於任意$k$，$1 \le k \le n$，$a_0 a_1 \ldots a_k - 1$都等於兩個連續正整數的乘積。再假設

$$a_0 a_1 \ldots a_n - 1 = A_n(A_n - 1)。$$

觀察

$$a_0 a_1 \ldots a_n a_{n+1} - 1 = [A_n^2 - A_n + 1]a_{n+1} - 1$$

可以進一步選取

$$a_{n+1} = A_n^2 + A_n + 1$$

使得

$$a_0 a_1 \ldots a_n a_{n+1} - 1 = [A_n^2 - A_n + 1][A_n^2 + A_n + 1] - 1 = A_n^2(A_n^2 + 1)$$

是兩個連續正整數的乘積。並且，因為最大公因數

$$(a_0 a_1 \ldots a_n, a_{n+1}) = (A_n^2 + A_n - 1, A_n^2 + A_n + 1) = 1$$

所以，數列$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$滿足兩兩互質。

(3)因此，依上述規律，可以選取數列如下：

$a_0 = 3, a_1 = 7 \Rightarrow a_0 a_1 - 1 = 5 \times 4 \Rightarrow A_1 = 5 \Rightarrow a_2 = A_1^2 + A_1 + 1 = 31$
$\Rightarrow a_0 a_1 a_2 - 1 = 26 \times 25 \Rightarrow A_2 = 26 \Rightarrow a_3 = A_2^2 + A_2 + 1 = 703, \ \ldots$

獨立研究參考解答

題目：在$x \neq 0$時，若實係數n次多項式滿足$f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$。證明：當$n$為正偶數時，存在多項式$g(x)$，滿足$f(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\left[g\left(\frac{n}{2}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right)\right]$。

解析				
	類　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編號	獨立研究（一）3

解答：

1. 假設實係數n次多項式為 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$。
2. 在$x \neq 0$時，由題意 $f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ 知

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= x^n\left[a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0\right] \\ &= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n \end{aligned}$$

比較係數得 $a_i = a_{n-i}$，$i = 0, \cdots, n$。

3. 當n為正偶數時，由 2 知

$$f(x) = x^n\left[a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}+1} + a_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0\right]$$

$$= x^{\frac{n}{2}}\left[a_0\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}} + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}-1} + \cdots + a_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{x}\right) + a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}-1}x + \cdots + a_1 x^{\frac{n}{2}-1} + a_0 x^{\frac{n}{2}}\right]$$

4. 令 $G(x) = \frac{a_{\frac{n}{2}}}{2} + a_{\frac{n}{2}-1}x + \cdots + a_1 x^{\frac{n}{2}-1} + a_0 x^{\frac{n}{2}}$，得 $f(x) = x^{n/2}\left[G(x) + G\left(\frac{1}{x}\right)\right]$。
5. 將$x = n$帶入得

$$f(n) = n^{n/2}\left[G(n) + G\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\left[2^{n/2}G(n) + 2^{n/2}G\left(\frac{1}{n}\right)\right]。$$

6. 若 $n = 2$，定義多項式$g(x) := \frac{1}{2}f(2x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 x + 2a_0 x^2$，則

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\left[g\left(\frac{n}{2}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right)\right] = g(1) + g(1) = 2g(1) = a_0 + 2a_1 + 4a_0 = f(2) = f(n)。$$

7. 若偶數$n>2$，定義一次多項式$g(x)$，滿足$g\left(\frac{n}{2}\right)=2^{n/2}G(n)$且$g\left(\frac{2}{n}\right)=2^{n/2}G\left(\frac{1}{n}\right)$，計算後得

$$g(x)=\frac{n\cdot 2^{\frac{n}{2}+1}}{n^2-4}\left[\left(G(n)-G\left(\frac{1}{n}\right)\right)x+\left(\frac{n}{2}G\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{2}{n}G(n)\right)\right]。$$

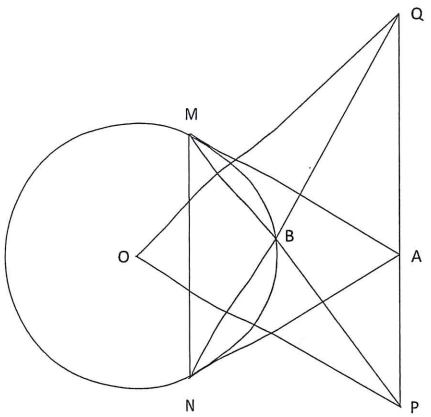
因此，$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\left[g\left(\frac{n}{2}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)\right]=\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\left[2^{n/2}G(n)+2^{n/2}G\left(\frac{1}{n}\right)\right]=n^{n/2}\left[G(n)+G\left(\frac{1}{n}\right)\right]=f(n)$。

※此題建構多項式$g(x)$的方法非唯一，解答僅供參考。

獨立研究參考解答

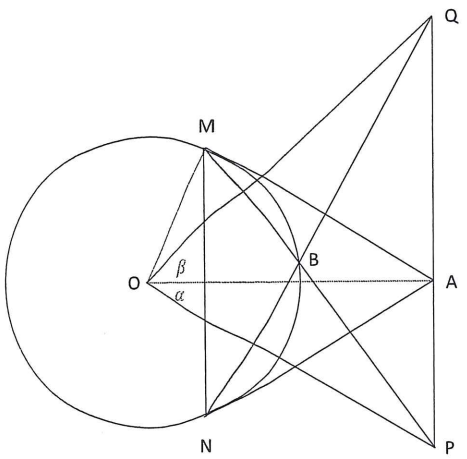
題目：

下圖中，$\overline{AM},\overline{AN}$是圓$O$的切線，$M$和$N$是切點，$B$是劣弧$\widehat{MN}$上異於$M$、$N$的點。過點$A$平行於$\overline{MN}$的直線分別交直線$\overline{BM}$、$\overline{BN}$於點$P$和$Q$。若$\angle POQ = 60°$，並用$S(O)$和$S(\Delta OPQ)$分別表示圓$O$和三角形$OPQ$的面積，求$\frac{S(O)}{S(\Delta OPQ)} = ?$



解析	類　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　☐ 改編於：		
	難易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編號	獨立研究（二）1

解答：



(1) 連結$\overline{OA}$、$\overline{OM}$，並記$\angle AOP=\alpha$、$\angle AOQ=\beta$。因為M和N是切點，可知$\overline{AM}=\overline{AN}$，且$\overline{AO}\perp\overline{MN}$。

(2) 因為弦切角等於同弧所對圓周角，以及平行線的同位角相等，

$$\angle AMP=\angle MNB=\angle AQN$$
$$\angle APM=\angle PMN=\angle ANQ$$

所以，$\Delta AMP\sim\Delta AQN$，進而得$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}}$，以及$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AM}\times\overline{AN}=\overline{AM}^2$

(3) 因為$\overline{PQ}$平行$\overline{MN}$，所以$\overline{AO}\perp\overline{PQ}$，並且

$$\cos\angle POQ=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\times\frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}\times\frac{\overline{AQ}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OA}^2-\overline{AP}\times\overline{AQ}}{\overline{OP}\times\overline{OQ}}$$
$$=\frac{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}{\overline{OP}\times\overline{OQ}}=\frac{\overline{OM}^2}{\overline{OP}\times\overline{OQ}}$$
$$\Rightarrow\overline{OM}^2=\frac{1}{2}\overline{OP}\times\overline{OQ}$$

因此，

$$S(O)=\pi\overline{OM}^2=\frac{\pi}{2}\overline{OP}\times\overline{OQ}$$

又依據正弦定理，

$$S(\Delta OPQ)=\frac{1}{2}\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\angle POQ=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{OP}\times\overline{OQ}$$

故得

$$\frac{S(O)}{S(\Delta OPQ)}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

獨立研究參考解答

題目：

二維平面上的每個點都定義一個非零實數，其中有正也有負。且設d為任意的正實數。

1. 證明平面上必存在距離為d的兩個點，其所對應的實數之乘積為正數。
2. 證明平面上必存在距離為d的兩個點，其所對應的實數之乘積為負數。

解析	類　　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 改編於：2008 年中國科學技術大學自主招生試題		
	難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	獨立研究（二）2

解答：

1. 任取一個邊長為d的正三角形，由鴿籠原理可知三個頂點中必有兩點之值為同正或同負，此兩點即為所求。
2. 任取一個對應值為正的點P與一個對應值為負的點Q。

   若P與Q的距離為d，則此兩點即為所求。

   若P與Q的距離小於d，則以此兩點為底作一個腰長為d的等腰三角形PQR。而其中R點之值必跟P與Q的其中一點之值為一正一負，此兩點即為所求。

   若P與Q的距離大於d，設PQ之距離為$kd+r$，其中k為正整數且$0 \le r < d$。在線段PQ上取k個點$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$使得$\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \cdots = \overline{P_{k-1}P_k} = d$，則$\overline{P_kQ} = r$。以此$P_k$與$Q$為底作一個腰長為$d$的等腰三角形$P_kQP_{k+1}$。

   可知$\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \cdots = \overline{P_{k-1}P_k} = \overline{P_kP_{k+1}} = \overline{P_{k+1}Q} = d$，且$P$與$Q$之值為一正一負。設$P = P_0$且$Q = P_{k+2}$，則必存在相鄰的$i$與$i+1$，$0 \le i \le k+1$，使得且$P_i$與$P_{i+1}$之值為一正一負，此兩點即為所求。

獨立研究參考解答

題目：已知 x, y, z 皆為實數，且滿足聯立方程組

$$\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=-1 \\ xy^2+yz^2+zx^2=5 \\ xyz=-2 \end{cases}$$

試求 $x+y+z$ 之值。

解析				
	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：math competition		
	難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編號	獨立研究（二）3

解答：令 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$，因此 $abc=1$，再用第三式分別去除以第一式及第二式後，

故原方程組可得

$$\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=-1 \\ xy^2+yz^2+zx^2=5 \\ xyz=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \\ a+b+c=-\frac{5}{2} \\ abc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-\frac{5}{2} \\ ab+bc+ca=\frac{1}{2} \\ abc=1 \end{cases}$$

所以 a, b, c 為三次方程式 $2x^3+5x^2+x-2=0$ 之解。又

$2x^3+5x^2+x-2=(2x-1)(x+1)(x+2)=0$，所以三個解為 $-1, -2, \frac{1}{2}$。

由於對稱性，為不失去一般性，我們不訪假設 $a=\frac{1}{2}$，因此 $a=\frac{1}{2}=\frac{x}{y}\Rightarrow y=2x$，

(1)如果 $b=-1=\frac{y}{z}\Rightarrow z=-y=-2x$，

所以 $-2=xyz=x\cdot 2x\cdot(-2x)=-4x^3\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, y=\sqrt[3]{4}, z=-\sqrt[3]{4}$

(2) 如果 $b=-2=\frac{y}{z}\Rightarrow y=-2z=2x\Rightarrow -2=x\cdot(-2x)\cdot(-x)\Rightarrow x^3=-1$，

所以 $x=-1, y=2, z=1\Rightarrow x+y+z=2$。

由上述知，$x+y+z=2$ 或 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$。

玖、112學年度各分區複賽試題及參考解答

112學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為46分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設$\{a_n\}$為滿足$a_1=1,\ a_2=2$的嚴格遞增之正整數數列，且當m,n互質時，$a_{mn}=a_m a_n$恆成立。

(1) 證明$a_3=3$。

(2) 給出a_n的一般項公式並證明之。

(11分)

問題二： 滿足$c^2=a^2+b^2$的正整數數對(a,b,c)稱為一組畢氏數。試證明對任意一組畢氏數(a,b,c)，下列恆成立。

(1) $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2>8$。

(2) $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2$不可能為整數。

(11分)

《背面尚有試題》

問題三：平面上四點 A,B,C,D 滿足任三點均不共線，且假設四邊形 $ABCD$ 的四條邊長之平方及兩對角線長的平方都是有理數，試證明 $\frac{\triangle ABC\text{面積}}{\triangle ADC\text{面積}}$ 也是有理數。

(12 分)

問題四：試證明聯立方程式 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=x+y+z \\ x^2+y^2+z^2=xyz \end{cases}$ 沒有正實數解。

(12 分)

《試題結束》

112 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

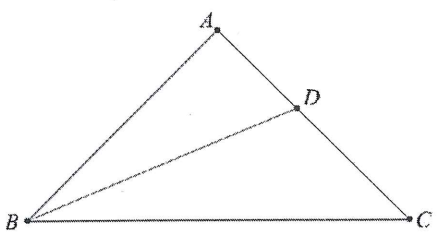
數學科筆試（二）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 設 x,y,z,u 為正整數，若 $x+y=3(z+u)$, $x+z=4(y+u)$，且 $x+u=5(y+z)$，則 x 最小的可能值為＿＿(一)＿＿。
2. 設 $P(x)$ 為一個實係數六次多項式，若 $P(x)$ 滿足 $(x-1)P(x^2)=(x+1)(P(x))^2$，則 $P(x)=$ ＿＿(二)＿＿。
3. 在等腰三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\angle B$ 的平分線交 $\overline{AC}$ 於 D，如下圖所示，若 $\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{BD}$，則 $\angle A=$ ＿＿(三)＿＿度。



《背面尚有試題》

4. 設 a, b, c 為非零實數，在座標平面上，若 $y=x^4-8x^2+ax+b$ 與 $y=x^2-cx$ 的圖形交於四點：(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)，則

$y_1+y_2+y_3+y_4=$ ____(四)____。

5. 方程組 $\begin{cases} xy=z-x-y \\ xz=y-x-z \\ yz=x-y-z \end{cases}$ 的解 (x, y, z) 有多少組？____(五)____

6. 將 10 個公正骰子一起擲一次，若事件 A, B 定義為

A：全部出現奇數點；

B：至少出現一個 1 點，

則機率 $P(A\cup B)=$ ____(六)____。

7. 若整數 a, b, c 恰好是方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三個根，則 (a, b, c) 可能為 ____(七)____。

8. 求面積為 100 cm^2，周長最短的直角三角形的斜邊邊長。____(八)____

《試題結束》

112 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共二題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試 1】

已知 s, t, u 為 $x^3-x-1=0$ 的三個根，求 $\frac{1-s}{1+s}+\frac{1-t}{1+t}+\frac{1-u}{1+u}=$ 的值。

【口試 2】

平面上有 n 個點，假設任意三點所形成的三角形面積都小於等於 1。請解釋：可以找到一個三角形區域（內部及邊界）面積為 4，且可以完全包括蓋住這 n 個點。

（註：此三角形的三頂點可以不全是這 n 個點）

《試題結束》

112 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題&解答

問題一：設$\{a_n\}$為滿足$a_1=1, a_2=2$的嚴格遞增之正整數數列，且當m,n互質時，$a_{mn}=a_m a_n$恆成立。

(1) 證明$a_3=3$。

(2) 給出a_n的一般項公式並證明之。

(11 分)

【證明】

(1) 由$a_3a_7=a_{21}<a_{22}=a_2a_{11}=2a_{11}<2a_{14}=2a_2a_7=4a_7$得$a_3<4$。

又因為$\begin{cases}a_3<4\\a_3>a_2=2\end{cases}$，所以$a_3=3$。

(2) 數列$\langle a_n\rangle$的一般項公示為$a_n=n$，並利用反証法證明如下。因為

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$, 假設$n_0(n_0\geq 4)$是最小滿足$a_{n_0}>n_0$的正整數。

因為$\{a_n\}$為嚴格遞增數列，所以當$n\geq n_0$時，$a_n>n$。

A. 當n_0是奇數時

由$(2,n_0-2)=1$得$a_{2(n_0-2)}=a_2a_{n_0-2}=2\cdot(n_0-2)$，但此與

$$\because n_0\geq 4\ \therefore 2\cdot(n_0-2)\geq n_0\Rightarrow a_{2(n_0-2)}>2(n_0-2)$$

矛盾。

B. 當n_0是偶數時

由$(2,n_0-1)=1$得$a_{2(n_0-1)}=a_2a_{n_0-1}=2\cdot(n_0-1)$，但此與

$$\because n_0\geq 4\ \therefore 2\cdot(n_0-1)\geq n_0\Rightarrow a_{2(n_0-1)}>2(n_0-1)$$

矛盾。

綜合上述及反證法，數列$\langle a_n\rangle$的一般項公示為$a_n=n$。

1

問題二： 滿足$c^2=a^2+b^2$的正整數數對(a,b,c)稱為一組畢氏數。試證明對任意一組畢氏數(a,b,c)，下列恆成立。

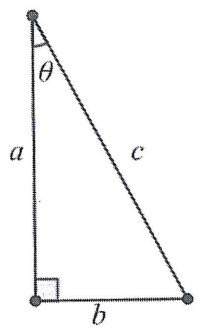
(1) $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2>8$。

(2) $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2$不可能為整數。

(11 分)

【證明】

(1) 計算得



$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$
$$=4\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin^2 2\theta}\right)$$
$$=\frac{4}{\sin^2 2\theta}+\frac{4}{\sin 2\theta}.$$

因為$0<\theta<90^\circ$，所以$0<\sin 2\theta\le 1$，又當$\sin 2\theta=1$時，

$$\theta=45^\circ\Rightarrow a=b\Rightarrow\frac{c}{a}=\sqrt{2}\ (\text{與}a,b,c\ \text{為自然數矛盾})\ 。$$

故$0<\sin 2\theta<1$，得

$$\frac{4}{\sin^2 2\theta}+\frac{4}{\sin 2\theta}>8。$$

(2) 假如$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2$為整數，$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)$必也是整數，

並令$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=m$ 及 $gcd(a,b)=1$。

由$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=m$得 $c(a+b)=mab$。

$$gcd(a,a+b)=1\Rightarrow a\mid c\ \ say\ \ c=ak$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=a^2k^2$$
$$\Rightarrow b^2=(k^2-1)a^2\Rightarrow a\mid b(\rightarrow\leftarrow)$$

因此

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2$$

不可能為整數。

問題三：平面上四點 A,B,C,D 滿足任三點均不共線，且假設四邊形 $ABCD$ 的四條邊長之平方及兩對角線長的平方都是有理數，試證明 $\frac{\triangle ABC\text{面積}}{\triangle ADC\text{面積}}$ 也是有理數。

(12 分)

【證明】

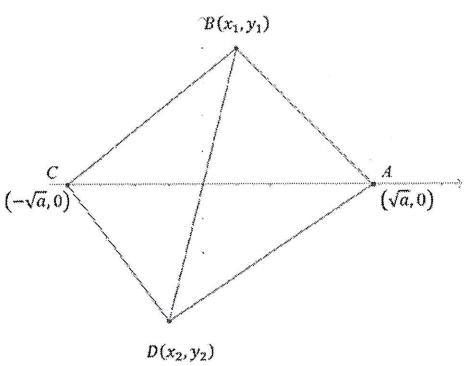
解一

設立座標，使得 A,B,C,D 如下圖：

設 $a>0$ 為有理數使得 $\overline{AC}=2\sqrt{a}$

$$\begin{cases}\overline{AB}^2=(x_1-\sqrt{a})^2+y_1^2\\ \overline{BC}^2=(x_1+\sqrt{a})^2+y_1^2\\ \overline{AD}^2=(x_2-\sqrt{a})^2+y_2^2\\ \overline{CD}^2=(x_2+\sqrt{a})^2+y_2^2\\ \overline{BD}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\end{cases}$$

均為有理數



$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\left(x_1^2+a+y_1^2\right)\in\mathbb{Q}\ \therefore x_1^2+y_1^2\in\mathbb{Q}$

$\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=4x\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow x_1\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow x_1^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow y_1^2\in\mathbb{Q}$

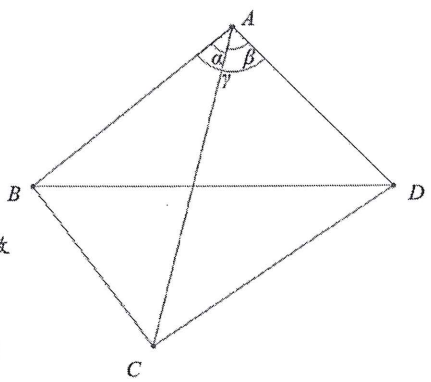
同理，$x_2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$，$x_2^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow y_2^2\in\mathbb{Q}$

$\therefore x_1x_2a\in\mathbb{Q}\Rightarrow x_1x_2\in\mathbb{Q}$

$By\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow y_1y_2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\dfrac{y_1}{|y_2|}\in\mathbb{Q}$

$\dfrac{\triangle ABC\text{面積}}{\triangle ACD\text{面積}}=\dfrac{\sqrt{a}y_1}{\sqrt{a}|y_2|}=\dfrac{y_1}{|y_2|}\in\mathbb{Q}$

解二



設$\angle BAC=\alpha$、$\angle DAC=\beta$，則$\angle A=\alpha+\beta=\gamma$

$$\begin{cases}2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2\\2\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cos\beta=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-\overline{CD}^2\\2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\gamma=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2\end{cases}$$ 均為有理數

$\left(2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha\right)^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\cos^2\alpha\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sin^2\alpha\in\mathbb{Q}$

同理，$\cos^2\beta$, $\sin^2\beta$, $\cos^2\gamma$, $\sin^2\gamma$ 均為有理數，

$2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\gamma=2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\left(\alpha+\beta\right)=$

$2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\alpha\cos\beta-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha\sin\beta\in\mathbb{Q}$

$\dfrac{\left(2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha\right)\left(2\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cos\beta\right)}{\overline{AC}^2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\alpha\cos\beta\in\mathbb{Q}\Rightarrow2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha\sin\beta\in\mathbb{Q}$

$\dfrac{\triangle ABC\text{面積}}{\triangle ACD\text{面積}}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\beta}=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha\sin\beta}{\overline{AC}^2\cdot\overline{AD}^2\sin^2\beta}\in\mathbb{Q}$(分子分母均為有理數)。

問題四：試證明聯立方程式 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=x+y+z \\ x^2+y^2+z^2=xyz \end{cases}$ 沒有正實數解。

(12 分)

【證明】

解一

假設 (x,y,z) 為正實數解，

由第二個方程式，$x-(yz)x+(y^2+z^2)=0$

判別式 $\Delta=(yz)^2-4(y^2+z^2)\geq 0$

$y^2z^2-4y^2-4z^2\geq 0$

同除以 $4y^2z^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\geq\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{1}{y^2}\Rightarrow y^2\geq 4\Rightarrow y\geq 2$

同理，$x\geq 2$ ，$z\geq 2$

由第一個方程式，$x(x^2-1)+y(y^2-1)+z(z^2-1)=0$

與 $x\geq 2$ ，$y\geq 2$ ，$z\geq 2$ 矛盾。

解二

設 $f(x,y,z)=(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)$ ，

且知 $x^3+y^3+z^3=x+y+z \Leftrightarrow f(x,y,z)=0$ 。

假設 (x,y,z) 為聯立方程式的正實數解，則

case (1)：If x,y,z all ≥ 1, then $f(x,y,z)\geq 0$

"="成立 $\Leftrightarrow x=y=z=1$

但是若 $x=y=z=1$ ，則 $x^2+y^2+z^2\neq xyz$

case (2)：May assume $x<1$

$x^2+y^2+z^2>y^2+z^2\geq 2yz>yz>xyz$

所以聯立方程式沒有正實數解。

112 學年度第一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

(數學科筆試二答案卷)

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答 案 欄

（一）	（二）	（三）	（四）
83	$x^5(x-1)$	100°	18
（五）	（六）	（七）	（八）
5 組	$1+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$	$(0,0,0)$, $(1,-2,0)$ 或 $(1,-1,-1)$	20

總分：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

112 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題&解答

【口試 1】

已知 s, t, u 為 $x^3-x-1=0$ 的三個根，求 $\frac{1-s}{1+s}+\frac{1-t}{1+t}+\frac{1-u}{1+u}=$ 的值。

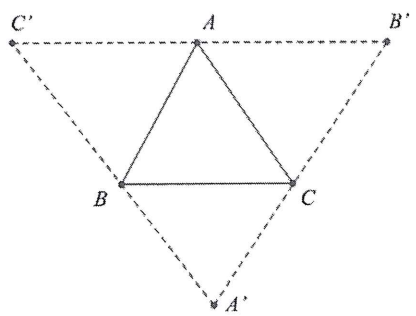
【解】1

【口試 2】

平面上有 n 個點，假設任意三點所形成的三角形面積都小於等於 1。請解釋：可以找到一個三角形區域（內部及邊界）面積為 4，且可以完全包括蓋住這 n 個點。

（註：此三角形的三頂點可以不全是這 n 個點）

【解】



設取其中三點 A, B, C

使得 $\triangle ABC$ 面積為最大（$area\triangle ABC \le 1$）

擴張 $\triangle ABC$ 區域成為 $\triangle A'B'C'$ 區域

Claim: $\triangle A'B'C'$ 區域（內部及邊界）可以蓋住所有的點，

取任意點 P ，$area\triangle PBC \le area\triangle ABC$

$\therefore P$ 必在 $\overleftrightarrow{C'B'}$ 與 B, C 的同側

$area\triangle PAB \le area\triangle ABC$

$\therefore P$ 必在 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 與 A, B 的同側

$area\triangle PAC \le area\triangle ABC$

$\therefore P$ 必在 $\overleftrightarrow{A'C'}$ 與 A, C 的同側

$\therefore P$ 必在 $\triangle A'B'C'$ 區域裡面

$area\triangle A'B'C' = 4area\triangle ABC \le 4$

稱為按比率擴充，則得一面積為4的三角形區域，蓋住所有的點。

112學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 A, B, C, R, S, T 為圓 O 上的相異點，其中 A, R 在 $\overline{BC}$ 的同側，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{RB}>\overline{RC}$。已知 $\overline{RS}=\overline{RT}=\sqrt{\overline{RB}\cdot\overline{RC}}$。試證：

(1) $\overline{RB}+\overline{RC}<2\overline{AB}$. （4分）

(2) 若 $\angle BRC\geq 90°$，則 $\triangle RBC$ 面積大於 $\triangle RST$ 面積。 （8分）

問題二： 在坐標空間中，有一直線 $L:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=z-1$ 及兩點 $A(1,2,1), B(0,1,-1)$。若點 P 在直線 L 上移動，求 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 的最小可能值。 （12分）

＜背面尚有試題＞

問題三： 設 $f(x)$ 為定義在所有正實數上的實數值函數。已知 $f(1)=2$，且對任意正實數 x, y，恆有

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$$

試求 $f(7)$ 之值。（12分）

問題四：

(1) 設 α, β, γ 為三銳角，且 $\alpha+\beta+\gamma=90°$。試證：

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1.$$

（4分）

(2) 試找出所有的正實數組 (x,y,z)，滿足方程組

$$\begin{cases} 2\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\left(y+\frac{1}{y}\right)=4\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$

（9分）

＜試題結束＞

112學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：_____**（學生自填）**

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 函數 $3\sin(x+20^\circ)+5\sin(x+80^\circ)$ 的最大可能值為____（一）____。

2. 設 $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3x+15}$，其中 $-5\leqslant x\leqslant 4$。若 $f(x)$ 的最小值為 a，最大值為 b，則數對 $(a,b)=$____（二）____。

3. 設 $\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^6=A+B$，其中 A 為整數，且 $0\leqslant B<1$。則 $B^2+13534\cdot B=$____（三）____。

4. 已知左右開口的雙曲線 Γ 的漸近線是 $x\pm 2y=0$，Γ 上動點 P 到 $A(5,0)$ 的距離之最小值為 $\sqrt{6}$。則雙曲線 Γ 的方程式為____（四）____。

5. 甲、乙兩人玩擲銅板遊戲，此銅板是不公正的銅板，每次丟擲，其出現正面的機率為 p。甲、乙兩人輪流擲此銅板，由甲先擲，先獲得正面者獲勝。但為了補償此遊戲不利於乙，言明乙第一次丟擲時，若出現反面，則乙可再擲一次。若甲、乙兩人獲勝的機率都是 $\frac{1}{2}$，則 p 的值為____（五）____。

6. 將27個一樣的球放入紅、白、藍色的箱子中，使得三個箱子內都有球，但球數皆不相同的方法數有____（六）____種。

7. 考慮集合 $S=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\frac{1}{13}\right\}$。令 a_k 表示從 S 中任意選出 k 個相異數的乘積之總和。則 $a_2+4a_4+16a_6=$____（七）____。

＜試題結束＞

112學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____**（學生自填）**

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間15分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【問題一】： 設S表示坐標平面上$\begin{cases} x-\sqrt{3}y+4\geqslant 0 \\ x+\sqrt{3}y+4\geqslant 0 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$所圍成的區域。設圓$C$為區域$S$中面積最大的圓。

(1) 試求圓C的方程式。

(2) 設圓C與x軸相交於A,B兩點，P為圓C內部的動點，滿足$\overline{PA},\overline{PO},\overline{PB}$為等比數列，其中$O$為原點。試求向量內積$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值。

（15分）

【問題二】： 設A是$\{1,2,3,\ldots,112\}$的子集合，滿足：若$x\in A$，則$2x\notin A$。試問A最多有幾個元素？（15分）

＜試題結束＞

112學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）參考答案

問題一： 設 A, B, C, R, S, T 為圓 O 上的相異點，其中 A, R 在 $\overline{BC}$ 的同側，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{RB}>\overline{RC}$。已知 $\overline{RS}=\overline{RT}=\sqrt{\overline{RB}\cdot\overline{RC}}$。試證：

(1) $\overline{RB}+\overline{RC}<2\overline{AB}$. （4分）

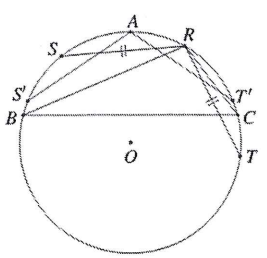
(2) 若 $\angle BRC\geqslant 90°$，則 $\triangle RBC$ 面積大於 $\triangle RST$ 面積。 （8分）

【解】 可設圓 O 的半徑為 1。

(1)

$$\begin{aligned}\frac{\overline{RB}}{2}+\frac{\overline{RC}}{2}&=\sin\frac{\angle ROB}{2}+\sin\frac{\angle ROC}{2}\\&=2\sin\frac{\angle ROB+\angle ROC}{4}\cos\frac{\angle ROB-\angle ROC}{4}\qquad\text{（和差化積）}\\&=\overline{AB}\cos\frac{\angle ROB-\angle ROC}{4}<\overline{AB},\end{aligned}$$

得證。



(2) 設 S', T' 為圓 O 上的兩點，滿足 $\overline{AS'}=\overline{AT'}=\overline{RS}=\overline{RT}=\sqrt{\overline{RB}\cdot\overline{RC}}$，
則 $\triangle RST\simeq\triangle AS'T'$ (SAS)，
因此命題等價於 $\triangle RBC$ 面積大於 $\triangle AS'T'$ 面積。
由算幾不等式與 (1) 知

$$\overline{AS'}=\sqrt{\overline{RB}\cdot\overline{RC}}<\frac{\overline{RB}+\overline{RC}}{2}<\overline{AB}$$

$$\Rightarrow\angle S'AT'>\angle BAC=\angle BRC\qquad\text{（“=”對等弧 }BC\text{）}$$

當 $\angle BAC\geqslant 90°$ 時，$\sin\angle BRC>\sin\angle S'AT'$，
因此 $\triangle RBC$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{RB}\cdot\overline{RC}\sin\angle BRC>\frac{1}{2}\overline{AS'}\cdot\overline{AT'}\sin S'AT'=\triangle S'AT'$ 面積，得證。
□

問題二： 在坐標空間中，有一直線$L:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=z-1$及兩點$A(1,2,1),B(0,1,-1)$。若點$P$在直線$L$上移動，求$\overline{AP}+\overline{BP}$的最小可能值。（12分）

【解】 答案：$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

可設參數式$P(2t,2t,t+1)$。由

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\sqrt{(2t-1)^2+(2t-2)^2+t^2}+\sqrt{(2t)^2+(2t-1)^2+(t+2)^2}\\&=\sqrt{9t^2-12t+5}+\sqrt{9t^2+5}\\&=3\left(\sqrt{\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2}+\sqrt{(t-0)^2+\left(0+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

上式可看成：坐標平面上x軸上的動點$P'(t,0)$到兩定點$A'\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),B'\left(0,\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)$的距離之和的3倍，即$3\left(\overline{P'A'}+\overline{P'B'}\right)$。因為$A',B'$兩點位於$x$軸的異側，故所求之最小值為

$$3\overline{A'B'}=3\sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

□

問題三： 設 $f(x)$ 為定義在所有正實數上的實數值函數。已知 $f(1)=2$，且對任意正實數 x, y，恆有

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$$

試求 $f(7)$ 之值。 （12 分）

【解】 答案：$\frac{2}{49}$.

由題意可知

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}. \tag{1}$$

因為 f 定義在正實數上，故可設 $x=\sqrt{u}, y=\sqrt{v}$，而 (1) 式成為

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{u+v}\right)}=\frac{1}{f(\sqrt{u})}+\frac{1}{f(\sqrt{v})}. \tag{2}$$

由此關係式，進一步令 $g(t)$ 為

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{f\left(\sqrt{t}\right)}, & \text{若 } f\left(\sqrt{t}\right)\neq 0,\\ 0, & \text{若 } f\left(\sqrt{t}\right)=0.\end{cases} \tag{3}$$

則 (2) 式變成 $g(u+v)=g(u)+g(v)$。利用此式與數學歸納法可知，當 $g(u)\neq 0$ 時，

$$\begin{aligned} g(2u)&=g(u)+g(u)=2g(u),\\ g(3u)&=g(2u)+g(u)=3g(u),\\ &\vdots\\ g(ku)&=k\cdot g(u), \qquad k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

取 $u=1, k=49$，有 $g(49)=49g(1)$，亦即

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{49}\right)}=\frac{49}{f\left(\sqrt{1}\right)} \quad\Rightarrow\quad f(7)=\frac{f(1)}{49}=\frac{2}{49},$$

故 $f(7)$ 之值為 $\frac{2}{49}$。 □

問題四：

(1) 設 α,β,γ 為三銳角，且 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$。試證：

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1.$$

（4分）

(2) 試找出所有的正實數組 (x,y,z)，滿足方程組

$$\begin{cases} 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4\left(z+\dfrac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$

（9分）

【解】 答案：(2) $(x,y,z)=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{15},\dfrac{\sqrt{15}}{9},\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

(1) 由正切函數的和角公式可得

$$\begin{aligned} &\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma \\ &\quad=\tan(90^\circ-\alpha-\gamma)(\tan\alpha+\tan\gamma) \\ &\quad=\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{\tan(\alpha+\gamma)} \\ &\quad=\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}} \\ &\quad=1-\tan\alpha\tan\gamma. \end{aligned}$$

所以 $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=(1-\tan\alpha\tan\gamma)+\tan\gamma\tan\alpha=1$, 得證。

(2) 設 A,B,C 為三角形三內角，並設

$$x=\tan\frac{A}{2},\quad y=\tan\frac{B}{2},\quad z=\tan\frac{C}{2}.$$

則由(1)小題知此假設滿足第二條方程式。又

$$\sin A=\frac{2\tan(A/2)}{1+\tan^2(A/2)}=\frac{2x}{1+x^2},$$

故 $x+\frac{1}{x}=(x^2+1)/x=\frac{2}{\sin A}$; 同理 $y+\frac{1}{y}=\frac{2}{\sin B}$, $z+\frac{1}{z}=\frac{2}{\sin C}$. 代入第一式得

$$\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}.$$

由正弦定理與餘弦定理可得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}.$$

同理 $\cos B=\frac{11}{16}, \cos C=-\frac{1}{4}$。最後再由半角公式知

$$x=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{\sqrt{15}}{15},$$
$$y=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}=\frac{\sqrt{15}}{9},$$
$$z=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

□

112學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）參考答案卷

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
7	(3,6)	13471	$x^2-4y^2=(5+\sqrt{6})^2$
(五)	(六)	(七)	
$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	288	$\frac{21}{13}$	

總　分：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

112學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試參考答案

問題一： 設S表示坐標平面上$\begin{cases} x-\sqrt{3}y+4\geqslant 0 \\ x+\sqrt{3}y+4\geqslant 0 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$所圍成的區域。設圓$C$為區域$S$中面積最大的圓。

(1) 試求圓C的方程式。

(2) 設圓C與x軸相交於A,B兩點，P為圓C內部的動點，滿足$\overline{PA},\overline{PO},\overline{PB}$為等比數列，其中$O$為原點。試求向量內積$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值。

（15分）

【解】 答案：(1) $x^2+y^2=4$；　(2) -2

(1) 設圓C的方程式為$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，則有

$$\begin{cases} \dfrac{|a-\sqrt{3}b+4|}{\sqrt{1+3}}=r \\ \dfrac{|a+\sqrt{3}b+4|}{\sqrt{1+3}}=r \\ a-2=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-\sqrt{3}b+4}{2}=r \\ \dfrac{a+\sqrt{3}b+4}{2}=r \\ 2-a=r \end{cases}$$

由此解得$(a,b,r)=(0,0,2)$，所以圓C的方程式為$x^2+y^2=4$。

註：作圖可知S是一個正三角形區域，圓C為其內切圓。由此亦可得圓C的方程式。

(2) 由對稱性，可設$A(-2,0),B(2,0),P(a,b)$。則有

$$\overline{PA}=\sqrt{(a+2)^2+b^2},\quad \overline{PO}=\sqrt{a^2+b^2},\quad \overline{PB}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}.$$

由題設可知

$$\sqrt{(a+2)^2+b^2}\cdot\sqrt{(a-2)^2+b^2}=a^2+b^2 \quad\Rightarrow\quad a^2-b^2=2.$$

因此得到

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-2-a,-b)\cdot(2-a,-b)=a^2-4+b^2=2b^2-2.$$

又因為點P在圓C內部，滿足$a^2+b^2<4$，進而推得

$$4>a^2+b^2=(b^2+2)+b^2=2b^2+2 \quad \Rightarrow \quad b^2<1 \quad \Rightarrow \quad -1<b<1.$$

故得

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2b^2-2\in[-2,0),$$

即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值為$-2$。 □

問題二： 設A是$\{1,2,3,\ldots,112\}$的子集合，滿足：若$x\in A$，則$2x\notin A$。試問A最多有幾個元素？（15分）

【解】 答案. 75

將$1,2,\ldots,112$分割成一些子集合，每個子集合都形如$\{x,2x,4x,\ldots\}$，其中的最小元素x為奇數。如果這樣的子集合中有k個元素，則最多可以取$\lceil\frac{k}{2}\rceil$個放入A中。分割成的子集合依元素個數可細分如下：

- $\{1,2,\ldots,64\}$有7個元素
- $\{3,6,\ldots,96\}$有6個元素
- $\{5,10,\ldots,80\}$, $\{7,14,\ldots,112\}$有5個元素
- $\{x,2x,4x,8x\}$，其中$x=9,11,13$，有4個元素
- $\{x,2x,4x\}$，其中x為在$[15,27]$中的奇數，有3個元素
- $\{x,2x\}$，其中x為在$[29,55]$中的奇數，有2個元素
- $\{x\}$，其中x為在$[57,111]$中的奇數，有1個元素

故A中最多有$4+3\cdot 3+2\cdot 10+1\cdot 42=75$個元素。 □

另解：A中可以有：

- 奇數，共$\lceil\frac{112}{2}\rceil=56$個
- 4的倍數但不是8的倍數，共$\lfloor\frac{112}{4}\rfloor-\lfloor\frac{112}{8}\rfloor=14$個
- 16的倍數但不是32的倍數，共$\lfloor\frac{112}{16}\rfloor-\lfloor\frac{112}{32}\rfloor=4$個
- 64的倍數但不是128的倍數，只有64這一個。

故總共可有$56+14+4+1=75$個。 □

112 學年度新北市（新店高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知下列聯立方程組有解，請問 θ 為何？

$$\begin{cases} -1-\theta^2+2\cos(k\theta)+\theta\sin(k\theta)=0, \\ \theta+\theta\cos(k\theta)-2\sin(k\theta)=0. \end{cases}$$

(16 分)

問題二： 已知數列 a_n 的首項 $a_1=-2$，對於所有 $m,n\in\mathbb{N}$，皆滿足

$$a_{m+n}=(1+\frac{m}{1+n})a_n+(1+\frac{n}{1+m})a_m+mn(m+n+1).$$

試求其一般項 a_n。 (16 分)

問題三： 設 H 為三角形 ABC 的垂心，圓 O 為通過 B,C,H 三點的圓，圓 P 為通過 C,H,A 三點的圓，以及圓 Q 為通過 A,B,H 三點的圓。試證圓 O、圓 P 及圓 Q 的直徑均相等。 (17 分)

< 試題結束 >

112 學年度新北市（新店高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案卷內。

問題一： 試問函數 $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{\cos 2x+\cos 3x}$ 的最小週期為__（一）__。

問題二： 滿足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2023}$ 的正整數數對 (x,y) 共有__（二）__組。
（註：當 $\alpha\neq\beta$，(α,β) 與 (β,α) 視為不同的整數數對。）

問題三： 半徑為 1 公分的球面上有兩點 $A(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$、$B(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，其球心位於原點。沿著球面從 A 點到 B 點的最短路徑長為__（三）__公分。

＜ 背面尚有試題 ＞

問題四： 已知點 A 在單位圓 O 上，線段 BC 在圓 O 外，D 為線段 AC 的中點。若 $\overline{BC}=3$，$\overline{OB}=\overline{OC}=4$，則 $\overline{BD}$ 的最小值為 **（四）** 。

問題五： 令 n 為正整數，$f(n)$ 表示 n 的最大正奇因數，例如：

$$f(2)=1,\ \ f(3)=3,\ \ f(6)=3.$$

試求 $\sum_{n=1}^{2^{2023}} f(n)$ 之值為 **（五）** 。

問題六： 數列 $\langle x_k\rangle$ 的定義如下：

$$x_{k+1}=-x_k^2+x_k+\frac{1}{4}$$
$$x_1=0.49$$

試問 x_5 為 **（六）** 。

問題七： 令 $f(x,y)=\dfrac{6x^2-8x+4+3y^2}{2x^2-2x+1+y^2}$。試問 $f(x,y)$ 可以為哪些整數。 **（七）**

＜ 試題結束 ＞

112 學年度新北市（新店高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題一： 設函數 $f(x)=(x^2-kx+2k)\cdot\log(x+1),\ x>-1$，其圖形恆通過四個象限，求 k 的範圍。

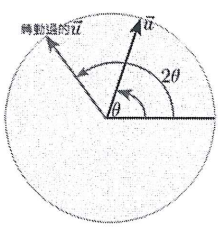
問題二： 設 xy-平面上有一單位向量 $\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$。在平面上，我們將 $y>0$ 的部分稱之為上半平面，$y<0$ 的部分稱之為下半平面。現在我們考慮一個轉動向量的規則：

$$(\cos\theta,\sin\theta),\ (\cos 2\theta,\sin 2\theta),\ (\cos 4\theta,\ \sin 4\theta),\ \ldots$$

轉動後的紀錄如下：

轉動次數 n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
輻角	θ	2θ	4θ	8θ	16θ	32θ	$\cdots$
上下半平面	上	上	下	上	上	下	$\cdots$

請問向量 $\vec{u}$ 的輻角為何？以弧度 0 至 2π 之間的數表示。



＜ 試題結束 ＞

112 學年度新北市（新店高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）參考答案

問題一： 已知下列聯立方程組有解，請問 θ 為何？

$$\begin{cases} -1-\theta^2+2\cos(k\theta)+\theta\sin(k\theta)=0, \\ \theta+\theta\cos(k\theta)-2\sin(k\theta)=0. \end{cases}$$

【參考解答】 令 $x=\cos(k\theta)$ and $y=\sin(k\theta)$.

$$\begin{cases} -1-\theta^2+2x+\theta y=0-(1) \\ \theta+\theta x-2y=0-(2) \end{cases}$$

$(1)\times\theta \Rightarrow -\theta-\theta^3+2\theta x+\theta^2 y=0$

$(2)\times 2 \Rightarrow 2\theta+2\theta x-4y=0$

$(1)\times\theta-(2)\times 2 \Rightarrow -3\theta-\theta^3+(\theta^2+4)\,y=0$

$\Rightarrow y=\frac{\theta^3+3\theta}{\theta^2+4}$

$(1)\times 2 \Rightarrow -2-2\theta^2+4x+2\theta y=0$

$(2)\times\theta \Rightarrow \theta^2+\theta^2 x-2\theta y=0$

$(1)\times 2+\ (2)\times\theta \Rightarrow -2-\theta^2+(4+\theta^2)\,x=0$

$\Rightarrow x=\frac{\theta^2+2}{\theta^2+4}$

Since $\cos(k\theta)=\frac{\theta^2+2}{\theta^2+4}$ and $\sin(k\theta)=\dfrac{\theta\,(\theta^2+3)}{\theta^2+4}$, $\cos^2(k\theta)=\left(\dfrac{\theta^2+2}{\theta^2+4}\right)^2$ and $\sin^2(k\theta)=\left(\dfrac{\theta\,(\theta^2+3)}{\theta^2+4}\right)^2$. Simplify $\left(\frac{\theta^2+2}{\theta^2+4}\right)^2+\left(\frac{\theta(\theta^2+3)}{\theta^2+4}\right)^2$ as follows.

$$\left(\frac{\theta^2+2}{\theta^2+4}\right)^2+\left(\frac{\theta(\theta^2+3)}{\theta^2+4}\right)^2=\frac{\theta^4+4\theta^2+4+\theta^6+6\theta^4+9\theta^2}{(\theta^2+4)^2}$$

$$=\frac{\theta^6+7\theta^4+13\theta^2+4}{(\theta^2+4)^2}=\frac{(\theta^2+4)(\theta^4+3\theta^2+1)}{(\theta^2+4)^2}$$

$$=\frac{\theta^4+3\theta^2+1}{\theta^2+4}$$

$$\frac{\theta^4+3\theta^2+1}{\theta^2+4}=1\Rightarrow\theta^4+3\theta^2+1=\theta^2+4$$

$$\Rightarrow\theta^4+2\theta^2-3=0$$

Let $v=\theta^2$. Note $v>0$. It follows from the above equation that we solve the following equation

$$\theta^4+2\theta^2-3=v^2+2v-3=0,$$

we get $v=-3$ or 1. Therefore, $\theta^2=1\Rightarrow\theta=\pm 1$.

問題二： 已知數列 a_n 的首項 $a_1=-2$，對於所有 $m,n\in\mathbb{N}$，皆滿足

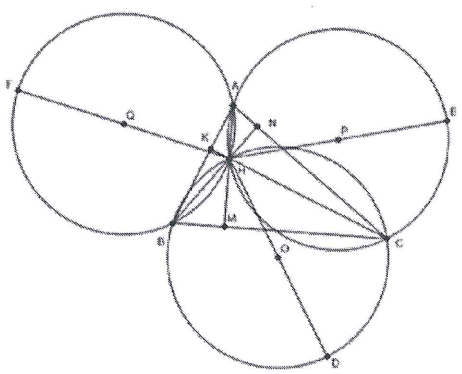
$$a_{m+n}=(1+\frac{m}{1+n})a_n+(1+\frac{n}{1+m})a_m+mn(m+n+1).$$

試求其一般項 a_n。

【參考解答】 $a_{m+1}=(\frac{m+2}{2})a_1+(\frac{m+2}{1+m})a_m+m(m+2)$
$a_m=(\frac{m+1}{2})a_1+(\frac{m+1}{m})a_{m-1}+(m-1)(m+1)$
同除以 $m+1$，
得 $\frac{a_m}{m+1}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_{m-1}}{m}+(m-1)=\frac{(m-3)m}{2}$
所以 $a_n=\frac{1}{2}n(n+1)(n-3)$。

問題三： 設 H 為三角形 ABC 的垂心，圓 O 為通過 B,C,H 三點的圓，圓 P 為通過 C,H,A 三點的圓，以及圓 Q 為通過 A,B,H 三點的圓。試證圓 O、圓 P 及圓 Q 的直徑均相等。

【參考解答】



(1) 分別作圓 O, 圓 P, 圓 Q 三圓的直徑 $\overline{HD},\overline{HE},\overline{HF}$。

(2) 作三角形 ABC 三邊的高 $\overline{AM},\overline{BN},\overline{CK}$。

(3) 連接 $\overline{DC},\overline{EC},\overline{HC}$ 得 $\angle DCH=\angle ECH=90°$，故 DCE 共線。

(4) $\angle CEH=\angle CAH$，$\angle CDH=\angle CBH$。

(5) $\angle CAH+\angle MCA=90°$，$\angle CBH+\angle BCN=90°$，得 $\angle CAH=\angle CBH$。

(6) $\angle CEH=\angle CAH=\angle CBH=\angle CDH$，故三角形 HDC 和三角形 HEC 全等，得 $\overline{HD}=\overline{HE}$。

(7) 同理，可得 $\overline{HE}=\overline{HF}$，三圓直徑相等。 □

112 學年度新北市（新店高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）參考答案

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$\frac{2\pi}{5}$	15	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{34}-1)$
(五)	**(六)**	**(七)**	
$\frac{4^{2023}+2}{3}$	$\frac{1}{2}-10^{-32}$	2, 3, 4	

112 學年度新北市（新店高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試參考答案

問題一： 設函數 $f(x)=(x^2-kx+2k)\cdot\log(x+1),\ x>-1$，其圖形恆通過四個象限，求 k 的範圍。

【參考解答】 首先，觀察到

$$\begin{cases}\log(x+1)>0 & \text{if } x>0\\ \log(x+1)<0 & \text{if } -1<x<0\end{cases}$$

設 $g(x)=(x^2-kx+2k)$，則有 $f(x)=g(x)\cdot\log(x+1)$。依題意，函數 $f(x)=g(x)\cdot\log(x+1)$ 的圖形恆通過四個象限，表示 $g(x)$ 在 $-1<x<0$ 和 $x>0$ 各有一個零根，亦即 $g(-1)>0$ 且 $g(0)<0$。由此可知

$$\begin{cases}1+k+2k>0\\ 2k<0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{3}<k<0$$

故得到 k 的範圍為 $-\frac{1}{3}<k<0$。

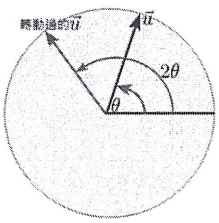
問題二： 設 xy-平面上有一單位向量 $\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$。在平面上，我們將 $y>0$ 的部分稱之為上半平面，$y<0$ 的部分稱之為下半平面。現在我們考慮一個轉動向量的規則：

$$(\cos\theta,\sin\theta),\ (\cos 2\theta,\sin 2\theta),\ (\cos 4\theta,\ \sin 4\theta),\ \ldots$$

轉動後的紀錄如下：

轉動次數 n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
輻角	θ	2θ	4θ	8θ	16θ	32θ	$\cdots$
上下半平面	上	上	下	上	上	下	$\cdots$

請問向量 $\vec{u}$ 的輻角為何？以弧度 0 至 2π 之間的數表示。



【參考解答】 令 θ 表示 $\vec{u}$ 的輻角，我們依據轉動次數 n 來討論：

$n=0$： $\vec{u}$ 在上半平面，則 $\theta \in (0,\pi)$，即 $(0,2\pi)$ 的前半；

$n=1$： $\vec{u}$ 轉一次之後在上半平面，則 $\theta \in (0,\pi/2)$，即 $(0,\pi)$ 的前半；

$n=2$： $\vec{u}$ 轉 2 次之後在下半平面，則 $\theta \in (\pi/4,\pi/2)$，即 $(0,\pi/2)$ 的後半；

$\vdots$

因此，以輻角的觀點來看，我們就是以

前前後前前後$\cdots$

的規則對於 $(0,2\pi)$ 區間做對半分。第 n 次的區間長度為

$$\frac{\pi}{2^n}$$

為了要表達滿足前 n 次轉動規律的區間，我們先來定義以下數列

$$a_0=0, a_1=0, a_2=1, a_3, 0, a_4=0, a_5=1, \ldots$$

則滿足前 n 次轉動規律的區間的左端點為

$$l_n=\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)\times\pi$$

而

$$r_n = l_n + \frac{\pi}{2^n}$$

因此，在這些區間共同交集的輻角為

$$\begin{aligned}\theta &= \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots\right) \times \pi \\ &= \left(0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} \cdots +\right) \times \pi \\ &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots\right) \times \pi \\ &= \frac{2}{7}\pi\end{aligned}$$

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 平面上，設三角形ABC的外接圓為ω。在$\angle A$的內角平分線上取一點D，作圓Γ通過A點，並與直線CD切於D點。已知圓Γ分別與AB邊及圓ω交於P,Q兩點。證明直線CD與PQ的交點X位於圓ω上。

(16分)

問題二： 求出所有形如$x^3+ax^2+3bx-4b$且三根為相異正整數的三次多項式。

(16分)

問題三： 對$X=\{1,2,3,\cdots,10\}$的每一子集S，令$f(S)$表示S中連續整數對$(i,i+1)$的組數；例如：集合$S=\{1,2,3,5,6,8\}$中的連續整數對有$(1,2),(2,3),(5,6)$，共3組，故$f(S)=3$。

(1) 對X中恰含3個元素的所有子集A，試求$f(A)$的值之總和。

(5分)

(2) 給定整數$k\,(0\le k\le 10)$，對X中恰含k個元素的所有子集B，試求$f(B)$的值之總和。

(12分)

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知角α滿足$0<\alpha<180°$，且$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=0$，求實數$\tan 2\alpha=$ (一) 。

2. 令$f(x)=\frac{2^x-2}{2^x+2}$，計算$\sum_{n=1}^{112} f(\frac{n}{56})=$ (二) 。

3. 將單位正立方體置於坐標空間中的第一卦限，使得$(0,0,0)$與$(1,1,1)$為最遠的兩個頂點。則此正立方體位於兩平行平面$x-y+z=0$及$x-y+z=1$之間的區域體積為 (三) 。

4. 若x,y為實數，則$\sqrt{(4x-2\sin y)^2+(3x-\cos y-5)^2}$的最小值為 (四) 。

5. 已知$\triangle ABC$的周長為12，$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$成等比數列，則$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值範圍為 (五) (答案以區間表示)。

6. 若正數x滿足方程式$1+\sqrt{(\log x)+11}=(\log x)^2-2\log x-10$，則$x=$ (六) 。

7. 令

$$N=\sum_{0\le i<j\le 50} C_i^{50}C_j^{50}$$

(註：上述和式中，對於每一組$0\le i<j\le 50$都有一項，因此有C_2^{51}項)

，求N除以31的餘數為 (七) 。

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間12分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足以下條件：

   $\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數，$0 < a_2 < a_1$ 且對任意的 $n \geq 1$，$a_{n+2} = a_n - \left[\frac{a_n}{a_{n+1}}\right] \cdot a_{n+1}$

   ，其中符號 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

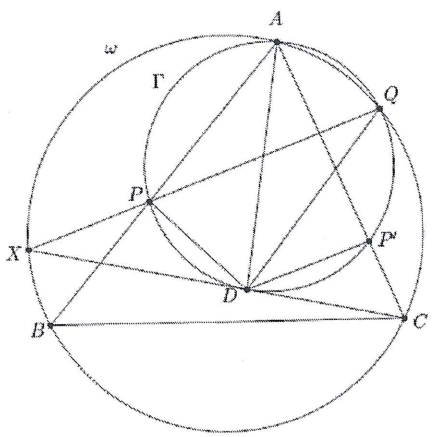
   (1) 試證：對任意的 $n \geq 1$，$0 < a_{n+1} < a_n$。

   (2) 試證：對任意的 $n \geq 1$，$a_{n+2} < \frac{a_n}{2}$。

2. 對於由有限個向量組成的集合 S，令 u_S 表示 S 中向量的總和。今在坐標空間中任選11個非零向量 (a_0, a_1, a_2)，其中 $a_0, a_1, a_2 \in \{0,1,2,3,4\}$。試證明在這11個向量中存在兩個相異的非空子集合 S 和 T，滿足內積 $(u_S - u_T) \cdot (1,5,25) = 0$。

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 平面上，設三角形 ABC 的外接圓為 ω。在 $\angle A$ 的內角平分線上取一點 D，作圓 Γ 通過 A 點，並與直線 CD 切於 D 點。已知圓 Γ 分別與 AB 邊及圓 ω 交於 P,Q 兩點。證明直線 CD 與 PQ 的交點 X 位於圓 ω 上。



證明：設圓 Γ 交 AC 邊於 P' 點。因為 D 為 $\angle PAP'$ 的角平分線與 $\triangle PAP'$ 的外接圓的第二個交點，所以弧 PD 等於弧 $P'D$。計算角度可得

$$\begin{aligned}
\angle CXQ &= \angle QPD - \angle PDX && \text{(外角關係)}\\
&= \angle DAQ - \angle PAD && \text{(圓周角、弦切角)}\\
&= \frac{1}{2}\widehat{DP'Q} - \frac{1}{2}\widehat{DP}\\
&= \frac{1}{2}\widehat{DP'Q} - \frac{1}{2}\widehat{DP'}\\
&= \frac{1}{2}\widehat{P'Q} = \angle CAQ.
\end{aligned}$$

故 X 在圓 CAQ 上，即圓 Γ. □

問題二： 求出所有形如 $x^3+ax^2+3bx-4b$ 且三根為相異正整數的三次多項式。

證明：令 $r_1<r_2<r_3$ 為三次多項式 $x^3+ax^2+3bx-4b$ 的三個相異根，則

$3b=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3$ 以及 $4b=r_1r_2r_3$。r_1,r_2,r_3 需滿足下列方程式：

$$\frac{3}{4}=\frac{3b}{4b}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

由此得到 $\frac{1}{r_1}<\frac{3}{4}$ 以及 $\frac{3}{r_1}>\frac{3}{4}$，所以 $2\le r_1\le 3$。

Case1. $r_1=2$：

則 $\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。同理，$r_2$ 滿足 $\frac{1}{r_2}<\frac{1}{4}$ 以及 $\frac{2}{r_2}>\frac{1}{4}$，由此得 $5\le r_2\le 7$。

將 $r_2=5,6,7$ 代入 $\frac{1}{4}-\frac{1}{r_2}=\frac{1}{20},\frac{1}{12}$ 以及 $\frac{3}{28}$。因此，我們有 $\boxed{(r_1,r_2,r_3)=(2,5,20),(2,6,12)}$。

Case1. $r_1=3$：

則 $\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$。$r_2$ 需滿足 $\frac{1}{r_2}<\frac{5}{12}$ 以及 $\frac{2}{r_2}>\frac{5}{12}$，由此得 $3\le r_2\le 4$。

但是已知條件 $r_2\neq r_1=3$，因此只剩下 $r_2=4$ 需要討論。

代入 $\frac{1}{r_3}=\frac{5}{12}-\frac{1}{r_2}=\frac{1}{6}$，因此，$\boxed{(r_1,r_2,r_3)=(3,4,6)}$。

因此，欲求之三次多項式如下：

$$(x-3)(x-4)(x-6)=x^3-13x^2+54x-72$$
$$(x-2)(x-6)(x-12)=x^3-20x^2+108x-144$$
$$(x-2)(x-5)(x-20)=x^3-27x^2+150x-200$$

□

問題三： 對 $X=\{1,2,3,\cdots,10\}$ 的每一子集 S，令 $f(S)$ 表示 S 中連續整數對 $(i,i+1)$ 的組數；例如：集合 $S=\{1,2,3,5,6,8\}$ 中的連續整數對有 $(1,2),(2,3),(5,6)$，共 3 組，故 $f(S)=3$。

(1) 對 X 中恰含 3 個元素的所有子集 A，試求 $f(A)$ 的值之總和。

(2) 給定整數 $k\,(0\le k\le 10)$，對 X 中恰含 k 個元素的所有子集 B，試求 $f(B)$ 的值之總和。

證明：考慮一般的情況：設 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$，其中正整數 $n\ge 2$，且 $|B|=k$。

對 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，我們定義 $g_i(B)=\begin{cases}1, & \text{若 } i,i+1\in B\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，可得 $f(B)=\sum_{i=1}^{n-1}g_i(B)$

且對每一個 $i=1,2,3,\cdots,n-2$，因為 B 中除了 $i,i+1$ 這二數外，還要從其餘的 $n-2$ 個數選取 $k-2$ 個數，故 $\sum_{|B|=k}g_i(B)=C_{k-2}^{n-2}$。因此，

$$\sum_{|B|=k}f(B)=\sum_{|B|=k}\sum_{i=1}^{n-1}g_i(B)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{|B|=k}g_i(B)=\sum_{i=1}^{n-1}C_{k-2}^{n-2}=(n-1)C_{k-2}^{n-2}$$

本題第一小題，$n=10,k=3$ 代入得 $\sum_{|A|=3}f(A)=9C_1^8=72$

本題第二小題，$n=10$ 代入得 $\sum_{|B|=k}f(B)=9C_{k-2}^8$ □

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試二參考答案)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$4-\frac{2\sqrt{13}}{5}$
(五)	**(六)**	**(七)**	
$[8,54-18\sqrt{5})$	10^5 或 $10^{\frac{1-3\sqrt{5}}{2}}$	16	

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足以下條件：

$\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數，$0 < a_2 < a_1$ 且對任意的 $n \geq 1$，$a_{n+2} = a_n - \left[\frac{a_n}{a_{n+1}}\right] \cdot a_{n+1}$

，其中符號 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

(1) 試證：對任意的 $n \geq 1$，$0 < a_{n+1} < a_n$。

(2) 試證：對任意的 $n \geq 1$，$a_{n+2} < \frac{a_n}{2}$。

【解】用數學歸納法，假設 $0 < a_{k+1} < a_k$ 且 $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ 為無理數

由 $a_{k+2} = a_k - \left[\frac{a_k}{a_{k+1}}\right] \cdot a_{k+1}$，可得 $0 < \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_k}{a_{k+1}} - \left[\frac{a_k}{a_{k+1}}\right] \leq \frac{a_k}{a_{k+1}} < 1$

可知 $0 < a_{k+2} < a_{k+1}$ 且 $\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}$ 為無理數，由數學歸納法得證。

又 $a_{n+2} = a_n - \left[\frac{a_n}{a_{n+1}}\right] a_{n+1} \leq a_n - a_{n+1} < a_n - a_{n+2}$，可得 $a_{n+2} < \frac{a_n}{2}$ □

112學年度北二區(新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

2. 對於由有限個向量組成的集合S，令u_S表示S中向量的總和。今在坐標空間中任選11個非零向量(a_0,a_1,a_2)，其中$a_0,a_1,a_2\in\{0,1,2,3,4\}$。試證明在這11個向量中存在兩個相異的非空子集合$S$和$T$，滿足內積$(u_S-u_T)\cdot(1,5,25)=0$。

【解】令$v=(1,5,25)$

只需證明在所給的向量中，任意11個裡存在非空子集合S和T滿足$u_S\cdot v=u_T\cdot v$即可。

內積$(a_0,a_1,a_2)\cdot v=a_0+a_15+a_25^2$, $0\le a_i\le 4$可視為一正整數的5-進位表示法。

所給的非零向量與v的內積為所有介於1到$5^3-1=124$的正整數。從這124個正整數中選取11個的和不超過$114+\cdots+124=1309$。故，這些向量的任一非空子集合S，必滿足$u_S\cdot v\le 1309$。

另一方面，從這些向量中任意11個所組成的集合共有$2^{11}-1=2047$個子集合，由鴿籠原理可知，至少有兩個非空子集合S和T滿足$u_S\cdot v=u_T\cdot v$。 □

112 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

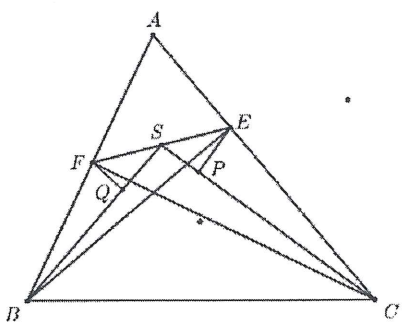
一、(9 分) 設 c 為常數且函數 $f(x)=x+c-(x^2+1)$. 令 $M(c)$ 為 $|f(x)|$ 在 $0\le x\le 1$ 的最大值。試問當 c 為何值時，$M(c)$ 的值為最小。

二、(10 分) 在等差數列 $100,103,106,\cdots,199$ 中任取 20 個相異數，證明：其中必有 2 相異數之和為 302。

三、(10 分) 某班有 20 個學生，玩小天使活動。每個人要準備一份小禮物，收集禮物之後，每人再從中隨機抽取一份禮物。假設 p 代表沒有任何一個人抽中自己禮物的機率，q 代表恰有一人抽中自己禮物的機率，證明 $|p-q|=\dfrac{1}{20!}$。

四、(10 分) 正 ΔABC 內部有一點 P 到三頂點的線段長分別為 $\overline{PA}=5,\overline{PB}=6,\overline{PC}=7$, 求正 ΔABC 的邊長。

五、(10 分) 如右圖，點 E,F 分別在 $\overline{AC},\overline{AB}$ 上使得 $\overline{BE}\perp\overline{AC},\overline{CF}\perp\overline{AB}$, 點 S 是 $\overline{EF}$ 的中點，點 P,Q 分別在 $\overline{SC},\overline{SB}$ 上使得 $\overline{PE}\perp\overline{SC},\overline{QF}\perp\overline{SB}$, 證明：$B,C,P,Q$ 共圓。



112學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、若 $\begin{cases} z+xy+z^2=3 \\ y^2-xz+z^2=1 \\ xy+z=2 \end{cases}$，求實數解$(x,y,z)$。

二、設a為實數，若三次方程式$5x^3-5(a+1)x^2+(71a-1)x+1=66a$的三個根皆為自然數，則$a$值為何？

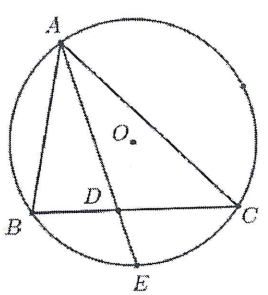
三、計算$1\cdot2\cdot4+4\cdot5\cdot7+7\cdot8\cdot10+\cdots+97\cdot98\cdot100$之值。

四、設$a\geq0, b\geq0, a+b=1, 0\leq\theta\leq2\pi$，求$a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+b\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$的最大值。

五、一副普通撲克牌共 52 張牌，定J,Q,K分別為 11,12,13 點，今隨機抽出 3 張，求點數和為 13 點的機率。

六、若對於所有的實數x,y, $f(yf(x+y)+f(x))=4x+2yf(x+y)$皆成立，求$f(2023)$。

七、如右圖，E在ΔABC的外接圓上，且$\overline{AE}$為$\angle A$的分角線，D是$\overline{AE}$與$\overline{BC}$的交點。已知ΔABC的外接圓的半徑為$\frac{25}{2}$，$\overline{AD}=15, \overline{AE}=20$，求$\Delta ABC$的面積。



112 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）解答

一、【解】

$$f(x)=x+c-(x^2+1)=\left(c-\frac{3}{4}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

當 $x=\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{3}{4}\Rightarrow\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|c-\frac{3}{4}\right|$

當 $x=0, x=1, f(0)=f(1)=c-1\Rightarrow|f(0)|=|f(1)||c-1|$

當 $c\le\frac{3}{4}, M(c)=|c-1|$

當 $c\le\frac{3}{4}, M(c)=\max\left\{|c-\frac{3}{4}, |c-1|\right\}$

當 $\left|c-\frac{3}{4}\right|=|c-1|$ 時，MCC 有最小值

$$c-\frac{3}{4}=1-c\Rightarrow c=\frac{7}{8}$$

二、【解】

令 $S=[100,103,106,\cdots,199]$. 則 S 有 34 個數，在 S 中可找到 16 組相異數 $A_1=[103,199], A_2=[106,196]\cdots$，$A_{16}=[148,154]$ 每一組的和都是 302，若中 S 中選 20 個數，即 S 有 14 個數不選，因此，$A_1,\ldots A_{16}$ 中至多有 14 組沒被選，或至少 2 組沒被選。

三、【解】

假設第 i 個同學是唯一抽中自己禮物的事件 $B_{n,i}$ 的機率為 $B_{n,i}$，$i=1,2,\cdots,n$。則 $b_n=\sum_{i=1}^{n}b_{n,i}$ 且正好有一位同學抽中自己禮物的事件 B_n 的個位是 $|B_n|=|B_{n,1}|+|B_{n,2}|+\cdots+|B_{n,n}|$.

假設$A_{n,i}$為n第i個同學正好抽到自己的禮物n的事件，$A_{n,i}^c$為$A_{n,i}$的補集。若$A_{n,i}$代表沒有任何一人抽中自己禮物的機率，則

$$A_n^c = A_{n,1}^c \cap A_{n,2}^c \cap \cdots A_{n,n}^c = (A_{n,1} \cup \cdots \cup A_{n,n})^c$$

由排容原理知，A_n^c發生的可能個數$\left|A_n^c\right|$為$\left|A_n^c\right| = n!\left|A_{n,1} \cup \cdots \cup A_{n,n}\right|$

$$= n! - \left\{\sum_{i=1}^{n}\left|A_{n,i}\right| - \sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_{n,i} \cap A_{n,j}\right| + - \cdots + (-1)^{n+1}\left|A_{n,1}\right| \cap \cdots \cap A_{n,n}\right\}$$

$$= n!\left\{n\times(n-1)! - c_2^n \times (n-2)! + - \cdots + (-1)^{n+1}\right\}$$

$$= n!\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right\}$$

我們可以觀察$\left|B_{n,i}\right|, i = 1,2,\cdots,n,$正好與$\left|A_{n,1}^c\right|$相等，這因為第$i$同學抽中自己禮物的條件固定之後，另外$n-1$個人都不能抽中自己的禮物。因此

$$\left|B_n\right| = \left|B_{n,1}\right| + \cdots + \left|B_{n,n}\right| = n\left|A_{n-1}^c\right|$$

所以

$$\left|A_n^c\right| - \left|B_n\right| = \left|n!\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right\} - \right.$$

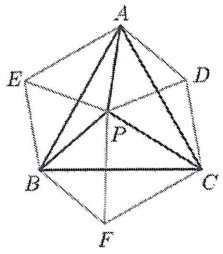
$$\left. n\times(n-1)!\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right\}\right| = \left|n! \times \frac{(-1)^n}{n!}\right| = 1$$

四、【解】

以A為中心，將ΔABP 逆時針旋轉60度後得到ΔACD

以B為中心，將ΔBCP 逆時針旋轉60度後得到ΔBAE

以C為中心，將ΔCAP 逆時針旋轉60度後得到ΔCBF



圖一：試求ΔABC的邊長

連接$\overline{PD},\overline{PE},\overline{PF}$,則$\Delta APE,\Delta BPE,\Delta CPF$皆為正三角形，邊長分別為5, 6, 7, 此外，$\Delta APE,\Delta BPF,\Delta CPD$都是邊長5, 6, 7, 的三角形。

觀察多邊形$AEBFCD$，多邊形面積是正三角形ΔABC的邊長為L，則

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot L^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(5^2+6^2+7^2\right)+3\cdot\sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 110+\sqrt[18]{6}.$$

上式有利用海龍公式：邊長為l,m,n的三角形面積為

$\sqrt{s(s-1)(s-m)(s-n)}$.其中$s=\dfrac{l+m+n}{2}$ 於是

$$L^2=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 110+18\sqrt{6}\right)=55+36\sqrt{2}\Rightarrow L=\sqrt{55+36\sqrt{2}}.$$

五、【解】

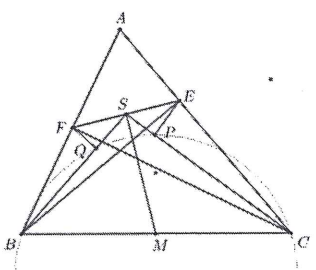
解：(a) E,F是在以$\overline{BC}$為直徑的圓上，令M為$\overline{BC}$的中點，則$\overline{MS}\perp\overline{EF}$. 因此得

$\angle SFQ=\angle BSM$ (記為α), $\angle SEP=\angle CSM$ (記為β)

(b) 因M為$\overline{BC}$的中點，$\Delta BSM,\Delta CSM$面積相等，所以得$\overline{BS}\cdot\overline{SM}\sin\alpha=\overline{CS}\cdot\overline{SM}\sin\beta$. 因此

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SE}\sin\alpha}{\overline{SF}\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\overline{CS}}{\overline{BS}},$$

得B,C,P,Q共圓。



112 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）解答

一、【解】

$xy=2-z$ 代入第一式，得 $z^2=1$，故 $z=1$，-1

將 $z=1$ 代入第二式，得 $xy=1$，故 $x=\dfrac{1}{y}$

將 $z=1$ 和 $x=\dfrac{1}{y}$ 代入第二式，得 $y^2=\dfrac{1}{y}$ 或 $y^3=1$ 或 $y=1$.

故 $(1,1,1)$ 為一解，同理，當 $z=-1$，可得 $x=-\sqrt[3]{9}$，$y=-\sqrt[2]{3}$，

故 $\left(-\sqrt[3]{9},-\sqrt[3]{3},-1\right)$ 為另一解。

二、【解】

$\because 5-5(a+1)+(7/a-1)+1=66a$

$\therefore$ 1 為此方程式之一根

$5x^3-5(a+1)x^2+(7/a-1)x+1-66a$

$=(x-1)(5x^2-5ax+66a-1)$

令 S, T 為此方程式之另外兩根

$\therefore s+t=a, s\times t=\dfrac{66a-1}{5}$

$\Rightarrow 5st=66(s+t)-1$

$5S-66)(5t-66)=25st-5\times 66(s+t)+66^2$

$=4351=19\times 229$

$\Rightarrow 5s-66+5t-66=19+229=248$

$\Rightarrow s+t=76=a$

三、【解】

$$\sum_{k=1}^{33}(3k-2)(3k-1)(3k+1)$$

$$=27\sum_{k=1}^{33}k^3-18\sum_{k=1}^{33}k^2-3\sum_{k=1}^{33}k+\sum_{k=1}^{33}2$$

$$27\cdot\left[\frac{33(33+1)}{2}\right]^2-18\cdot\frac{33\cdot(33+1)(2\cdot33+1)}{6}-3\cdot\frac{33(33+1)}{2}+2\cdot33$$

=8270328

四、【解】

$$a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+b\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=a\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=b\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3a}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)+\cos\theta\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$$

上式的最大值為

$$\left[\left(\frac{\sqrt{3a}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{3}{4}(a-b)^2+\frac{1}{4}(a+b)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{3}{4}(a-b)^2+\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

又$(a-b)^2$在$a+b=1,a\geq0,b\geq0$條件下的最大值顯然為1，即當

$a=1,b=0$ 或 $a=0,b=1$. 故原是的最大值為 $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=1.$

五、【解】

將此 3 張牌案點數由小到大排列可能為

$(1,1,11),(1,2,10),(1,3,9),(1,4,8),(1,5,7),(1,6,6),(2,2,9),$

$(2,3,8),(2,4,7),(2,5,6),(3,3,7),(3,4,6),(3,5,5),(4,4,5)$

因此所有可能的牌型數為

$C_2^4\cdot 4+4^3+4^3+4^3+4^3+4C_2^4+C_2^4\cdot 4+4^3+4^3+4^3+$

$C_2^4\cdot 4+4^3+4\cdot C_2^4+C_2^4\cdot 4$

$=6\cdot 4\cdot C_2^4+8\cdot 4^3$

$=656$

所以此事件的機率為 $\frac{656}{(52\cdot 51\cdot 50/3!}=\frac{164}{5525}$

六、【解】

$y=0\Rightarrow f(f(x))=4x$

令

$f(0)=f(4\cdot 0)=f(f(0))=4f0)\Rightarrow f(0)=0$

$x=0,y=1\Rightarrow 4=f(f(1))=2f(1)$

令

$f(1)=2$

且 $f(2)=f(f(1))=4$

因 $y=1-x$ 代入 $f(2(1\text{-}x)+f(x)=4x+4(1-x)=4=f(2)$

$f=(1-x)+f(x)=2$

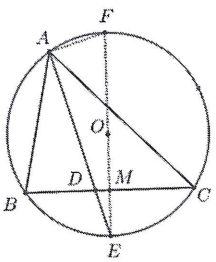
$f(x)=2x$

七、【解】

解：設O為外心，M為$\overline{BC}$的中點，F是E的對徑點。因$\angle FAD=90°=\angle FMD$，得$A,F,D,M$共圓，由此知

$$\overline{EM}\cdot\overline{EF}=\overline{ED}\cdot\overline{EA}=100$$

所以$\overline{EM}=4,\overline{OM}=8.5$．設$A-$高為$h$，則$\frac{h}{ME}=\frac{\overline{AD}}{DE}=\frac{15}{5}$．所以$h=12$．又$\overline{BM}=\sqrt{12.5^2-8.5^2}=2\sqrt{21}$，得$\Delta ABC$的面積為$24\sqrt{21}$．



112學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（一）　編號：＿＿＿

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、一輪遊戲將投擲一次一個公正骰子並接著投擲一枚公正硬幣，其中投出骰子的點數代表硬幣可以投擲的最大次數，若投擲硬幣時出現頭像，則遊戲隨即結束，若達到可以投擲硬幣的最大次數仍未出現頭像，則繼續下一輪的遊戲。試求遊戲至少須玩三輪才能結束的機率。 (10分)

二、設$\{a_n\}$為一數列，$a_1=2, a_2=4,\ a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$其中$n=3,4,\cdots$.
證明：對所有正整數k，若$2^k \mid n$，則$2^{k+1} \mid a_n$. (10分)

三、設B,C為平面上兩個相異點，A為滿足下列條件的動點：若ΔABC的重心為G，則$\angle BAC+\angle BGC=180°$，求動點$A$的軌跡。 (10分)

四、令$f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{(1+3x)(4x+y)(3y+4z)(z+16)}$ 其中$x, y, z>0$.
求$f(x,y,z)$之最大值。 (10分)

五、設a,b,c,d為非負整數，M,N為正整數，且$N-M=2023$.
已知$x^4+Mx^2+N=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$, 求滿足這樣條件的$(M,N)$共有幾組? (9分)

112學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（二）　編號：____

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題3分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 ΔABC 之點坐標為 $A=(0,0), B=(4,0), C=(3,3)$，$P$ 為三角形內部一點，d_a, d_b, d_c 分別為 P 到 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的距離。已知點 $P(x,y)$ 使得 $d_a^2+d_b^2+d_c^2$ 為最小，則 $(x,y)=$____。

二、設 $\{a_n\}$ 為一正整數數列，滿足 a_{n+1} 為 a_n 的各個位數的數字和，例如：若 $a_n=123$，則 $a_{n+1}=1+2+3=6$。理論上這個數列只要一直做下去，最後一定會停留在1到9其中一個數字。設 a_1 為1到2023中的某一個正整數，使得此數列最後停在7這個數字，若這樣的 a_1 總共有 m 種選擇，則 $m=$____。

三、設 x,y 為實數，且滿足方程式

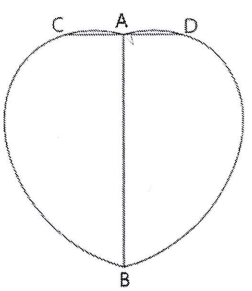
$$\begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+4x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ 1+\dfrac{12}{y+4x}=\dfrac{8}{\sqrt{y}} \end{cases}$$

，則 $x=$ ____。

四、令 m 為方程式 $x+y+z=20$ 整數解的個數，其中 $-3\le x\le 4, 2\le y\le 10$，且 $z\ge 3$，則 $m=$ ____。

五、令 r,s,t 為多項式 $p(x)=x^3-2007x+2002$ 的三個實數根，則 $\dfrac{r}{r+1}+\dfrac{s}{s+1}+\dfrac{t}{t+1}=$____。

六、一直線過一橢圓中心，且與橢圓的長軸所在直線的銳夾角為45°，此直線可將此橢圓分成兩個半橢圓，將其中一個半橢圓翻轉後，可與另一個半橢圓組成一個心型圖樣（如右圖）。已知 A,B,C,D 在此心型上，$\overline{AB}$ 位於此心型的對稱軸上，且 $\overline{CD}$ 垂直 $\overline{AB}$。若 $\overline{AB}=2\overline{CD}$，$m$ 為此橢圓長軸長比短軸長的比值，則 $m=$ ____。



七、設 $\{a_n\}$ 為一個正整數數列，對所有的正整數 n，a_n 均滿足：3^{a_n} 為所有3的正整數次方中最靠近 2^n 的數。例如，在所有3的正整數次方中，最靠近 2^3 的數為 3^2，所以 $a_3=2$. 已知 $a_k=2002$，則 $k=$ ____。

（已知 $\log_3 2\approx 0.6309, \log_2 3\approx 1.5850$）

112 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

註: H 代表該次投擲時硬幣為頭像，T 代表該次投擲時硬幣為文字

P(遊戲於該一輪中結束)

$=P$(骰子 1 點∩投擲硬幣時出現頭像)+ P(骰子 2 點∩投擲硬幣時出現頭像)
+ P(骰子 3 點∩投擲硬幣時出現頭像)+ P(骰子 4 點∩投擲硬幣時出現頭像)
+ P(骰子 5 點∩投擲硬幣時出現頭像)+ P(骰子 6 點∩投擲硬幣時出現頭像)

$= P(\text{H}|\text{骰子 1 點})\times P(\text{骰子 1 點})$
$+P(\text{H}\cup\text{TH}|\text{骰子 2 點})\times P(\text{骰子 2 點})$
$+P(\text{H}\cup\text{TH}\cup\text{TTH}\,|\text{骰子 3 點})\times P(\text{骰子 3 點})$
$+P(\text{H}\cup\text{TH}\cup\text{TTH}\cup\text{TTTH}\,|\text{骰子 4 點})\times P(\text{骰子 4 點})$
$+P(\text{H}\cup\text{TH}\cup\text{TTH}\cup\text{TTTH}\cup\text{TTTTH}\,|\text{骰子 5 點})\times P(\text{骰子 5 點})$
$+P(\text{H}\cup\text{TH}\cup\text{TTH}\cup\text{TTTH}\cup\text{TTTTH}\cup\text{TTTTTH}\,|\text{骰子 6 點})\times P(\text{骰子 6 點})$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)\times\left[6\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+3\times\frac{1}{2^4}+2\times\frac{1}{2^5}+1\times\frac{1}{2^6}\right]=\frac{321}{384}=\frac{107}{128}$$

由於每輪遊戲皆為獨立，因此

P(遊戲至少須玩三輪才能結束)

$= 1-P$(遊戲於第一輪結束)-P(遊戲於第一輪未結束∩遊戲於第二輪結束)

$= 1-P$(遊戲於第一輪結束)-P(遊戲於第一輪未結束)×P(遊戲於第二輪結束)

$$=1-\frac{107}{128}-\left(1-\frac{107}{128}\right)\times\frac{107}{128}=\frac{441}{16384}$$

二、【解】

滿足 $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ 之 a_n 為

$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$

由 $a_1 = 2$ 及 $a_2 = 4$ 解得 $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$

利用二項式定理可得

$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n (\sqrt{2})^r,$

$(1-\sqrt{2})^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_r^n (\sqrt{2})^r.$

因此，$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{i=0}^{p} (2\sqrt{2}) 2^i C_{2i+1}^n)$

$= 2n + \sum_{i=1}^{p} 2^{i+1} C_{2i+1}^n$，其中 p 為最大整數滿足 $2p+1 \le n.$

假設 $2^k \mid n$，則 $n = 2^k m, m \in \mathbb{N}.$

此外 $2^{i+1} C_{2i+1}^n = 2^{i+1} n \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-2i)}{(2i+1)!}$

$= 2^{k+i+1} \frac{m}{2i+1} C_{2i}^{n-1}$

對 $i \ge 1$, 因 $2i+1$ 不是 2^i 的因數，所以 $\frac{m}{2i+1} C_{2i}^{n-1}$ 為一個整數。

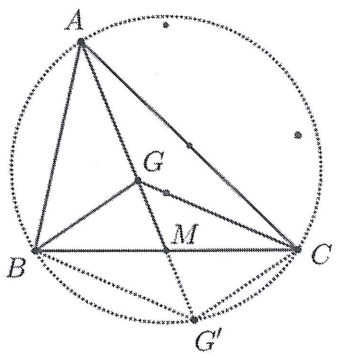
且 $a_n = 2n + \sum_{i=1}^{p} 2^{k+i+1} C_{2i+1}^n = 2^{k+1} m + 2^{k+2} M$，其中 M 為一個整數。

因此 $2^{k+1} \mid a_n.$

三、【解】

設 M 為 $\overline{BC}$ 的中點，G' 是 G 對 M 的對稱點，則 $BGCG'$ 為平行四邊形，所以得

$$\angle BAC+\angle BG'C=\angle BAC+\angle BGC=180^\circ.$$



因此 A,B,G',C 共圓。由內冪定理知

$$\overline{AM}\cdot\overline{MG'}=\overline{BM}\cdot\overline{MC}=\overline{BM}^2.$$

但 $\overline{MG'}=\overline{MG}=\frac{1}{3}\overline{AM}$，所以得 $\overline{AM}^2=3\overline{BM}^2$．因此 A 的軌跡是：以 M 為中心半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}$ 的圓 ω 上扣除 $\overline{BC}$ 與 ω 的交點（若 A 不在 $\overline{BC}$ 與 ω 的交點位置上，回推可知 A 滿足條件）。

註：不用圓冪，也可用座標算，如令 A,B,C 分別為 $(b,c),(-1,0),(1,0)$，則 G' 為 $(-b/3,-c/3)$，由共圓條件不難算得 b,c 滿足的方程。

四、【解】

現在 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{12(1+3x)(1+\frac{y}{4x})(1+\frac{4z}{3y})(1+\frac{16}{z})}$

$=\dfrac{1}{12(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)}$，其中 $\alpha=3x,\beta=\dfrac{y}{4x},\gamma=\dfrac{4z}{3y},\delta=\dfrac{16}{z}$

因此 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 皆大於 0 且 $\alpha\beta\gamma\delta=2^4$

此外 $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)$

$=1+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$

$+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)+\alpha\beta\gamma\delta$

$\geq 1+4(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}+6(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{3}{6}}+4(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{3}{4}}+\alpha\beta\gamma\delta$

$=1+8+24+32+16=81$

所以 $f(x,y,z)\leq\dfrac{1}{12\times 81}=\dfrac{1}{972}$

因為 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{972}$，當 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=2$,

即 $x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{16}{3}$, $z=8$, 所以 $f(x,y,z)$ 之最大值為 $\dfrac{1}{972}$

五、【解】

依題意可知 $a+c=0, b+d+ac=M, ad+bc=0, bd=N$.

即 $a=-c$，由於 a,b,c,d 為非負整數，因此 $a=c=0$

此時 $b+d=M, bd=N$，因此 $bd-(b+d)=2023$, 即 $(b-1)(d-1)=2024=2^3\cdot 11\cdot 23$,

考量對稱性，(M,N) 共有 8 組解。

112 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

依題意，

$$d_a\overline{BC}+d_b\overline{CA}+d_c\overline{AB}=2\times(\Delta ABC\text{面積})$$

$\therefore$

$$\sqrt{10}\,d_a+3\sqrt{2}d_b+4d_c=12$$

$\therefore$

$$(d_a^2+d_b^2+d_c^2)(10+18+16)\geq\left(\sqrt{10}\,d_a+3\sqrt{2}d_b+4d_c\right)^2=144$$

最小值發生在$\frac{d_a}{\sqrt{10}}=\frac{d_b}{3\sqrt{2}}=\frac{d_c}{4}=\lambda$ 帶入得$\lambda=\frac{3}{11}$，$d_b=\frac{9\sqrt{2}}{11}$，$y=d_c=\frac{12}{11}$。

由點到直線公式，

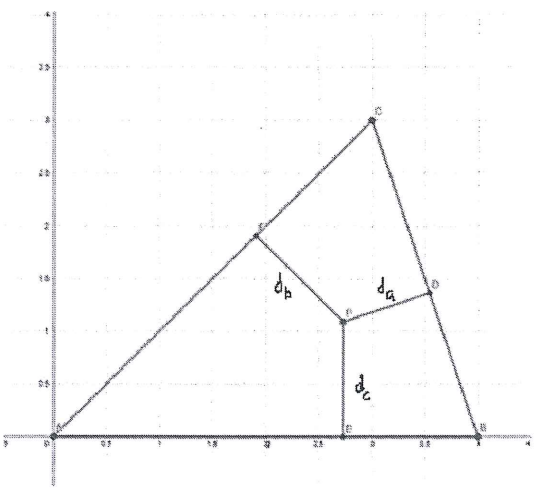
$$d_b=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$

$$\frac{9\sqrt{2}}{11}=\frac{\left|x-\frac{12}{11}\right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ x=\frac{30}{11}$

$\therefore\ P=(\frac{30}{11},\frac{12}{11})$



二、【解】註：$H_b^a=C_b^{a+b-1}$

做 1 次是 7 的：假設$a_1=10^3x_3+10^2x_2+10x_1+x_0$，

那麼$x_0+x_1+x_2+x_3=7$

$x_3=0, H_7^3=36$

$x_3=1, H_6^3=28$

$x_3=2, 2023, 2014, 2005$

做 2 次是 7 的：因為做一次之後最大的數字只有可能是$1+9+9+9=28$

而 1 到 28 中符合的可以是 16 或 25，那麼$x_0+x_1+x_2+x_3=16, 25$

所以尚有

$$x_3=0, H_{16}^3-C_1^3H_6^3=69, H_{25}^3-C_1^3H_{15}^3+C_2^3H_5^3=6$$
$$x_3=1, H_{15}^3-C_1^3H_5^3=73, H_{24}^3-C_1^3H_{14}^3+C_2^3H_4^3=10$$

總共有 $(36+28+3)+(69+6+73+10)=225$ 個

三、【解】

此程組滿足 $x,y>0$，且 $y+4y\neq 0$，且此方程組等價為

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=1\cdots(1)\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=\dfrac{12}{y+4x}\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)\times(2)$ 得到 $\dfrac{16}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{12}{y+4x}$

$\Leftrightarrow (16x-y)(y+4x)=12xy \Leftrightarrow y^2-64x^2=0$

$\Leftrightarrow y=8x$ or $y=-8x$（不合）

從 (1), $y=8x\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{8x}}=1\Rightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=3+2\sqrt{2}$,

$y=24+16\sqrt{2}$

四、【解】

因 $1\le x+4\le 8,\ 1\le y-1\le 9,\ 1\le z-2$

則 $(x+4)+(y-1)+(z-2)=21$

因此 m 為方程式 $x+y+z=21$ 整數解的個數，

其中 $1\le x\le 8,\ 1\le y\le 9,\ 1\le z$

所以 m =所有正整數的解-(所有解 $x\ge 9$ + 所有解 $y\ge 10$) + 所有解滿足 $x\ge 9, y\ge 10$.

$$=C_2^{20}-(C_2^{12}+C_2^{11})+C_2^3$$
$$=190-(66+55)+3=72$$

五、【解】

現在 $\frac{r}{r+1}+\frac{s}{s+1}+\frac{t}{t+1}=3-(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{t+1})$

若 r,s,t 為多項式 $P(x)$ 的根，則

$r+1,s+1,t+1$ 為 $\theta(x)$ 的根，其中

$$\theta(x)=P(x-1)=(x-1)^3+2007(x-1)+2002$$
$$=x^3-3x^2-2004x+4008$$

因此 $\frac{1}{r+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{t+1}=\frac{2004}{4008}=\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{r}{r+1}+\frac{s}{s+1}+\frac{t}{t+1}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

六、【解】

不失一般性，假設 $\overline{AB}=4,\overline{CD}=2$。設橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，則

$A(2\ cos\ 45°,2\ sin\ 45°)$，$D\left(\sqrt{5}\ cos\ (45°-\emptyset),\sqrt{5}\ sin(\ 45°-\emptyset)\right)$，其中 $\tan\emptyset=1/2$。代入橢圓方程式並利用克拉瑪公式可得

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{4\ cos^2 45°-5\ cos^2(45°-\emptyset)}{5\ sin^2(45°-\emptyset)-4\ sin^2\ 45°}$$

利用和角公式可得 $\sin(45°-\emptyset)=1/\sqrt{10},cos(45°-\emptyset)=3/\sqrt{10}$，代入可得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

七、【解】

依題意可知

$$\frac{3^{a_n-1}+3^{a_n}}{2}<2^n<\frac{3^{a_n}+3^{a_n+1}}{2}$$

即

$$1+(a_n-1)\log_2 3<n<1+a_n\cdot\log_2 3$$

將 $a_k=2002$ 代入，可得

$$3172.585\approx 1+2001\times 1.5850<k<1+2002\times 1.5850\approx 3174.17$$

所以 $k=3173,3174.$

112 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）

注意事項：

(1) 作答時間：2 小時，不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 9 分，其餘題目各 10 分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答。

一、已知 x, y, z 皆為實數，且滿足聯立方程組

$$\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=-1 \\ xy^2+yz^2+zx^2=5 \\ xyz=-2 \end{cases}$$

試求滿足這樣條件之所有 $x+y+z$ 之值。

二、設 a,b,c 為正整數，使得 $(b-\frac{1}{a})(c-\frac{1}{b})(a-\frac{1}{c})$ 為整數，試求滿足這樣條件的所有可能 a,b,c 之值。

三、如果 A, B, C 是三角形 ABC 的三個內角，試證:

$$-1 \le \sin 3A+\sin 3B+\sin 3C \le \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

並確定等號是否成立及何時成立。

四、某運動會連續舉辦了 $n(n>1)$ 天，總共發出 m 面獎牌。第一天發出 1 面以及剩下 $m-1$ 面獎牌的 $\frac{1}{13}$，第二天發出 2 面以及剩下獎牌的 $\frac{1}{13}$，之後每天均按此規律發出獎牌，在最後一天即發出剩下的 n 面獎牌。試問此運動會共舉辦了幾天？一共發出幾面獎牌？

五、設 A 為一個由正整數構成的集合，其中 A 中的任意兩個元素 x、y 皆滿足 $|x-y| \ge \frac{xy}{31}$，試求 A 至多有多少個元素?

112 學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）

注意事項：

(1)作答時間：1 小時，不可使用電算器。

(2)本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3)請將答案及演算結果依序寫在答案卷上。

(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5)需使用黑色或藍色筆作答。

一、設 $f(x)$ 為一個 2023 次多項式，如果

$f(1)=0, f(2)=1, f(4)=2, \cdots, f(2^{2023})=2023$ ，則多項式 $f(x)$ 的 x 項之係數為 ___(一)___。

二、設多項式 $p(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，其中 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 為實數，且 $p(1)=112$，$p(2)=224$，$p(3)=336$，$p(4)=448$，則 $p(11)-p(-6)=$ ___(二)___。

三、設 $f(x)$ 為一個 n 次多項式，對於 $k=0,1,2,\ldots,n$，都滿足 $f(k)=\frac{k}{k+1}$，則 $f(n+1)=$ ___(三)___。

四、已知三角形 ABC 之三邊長為連續正整數，如果最大角的度數是最小角度數的 2 倍，則此 ΔABC 最大邊長為 ___(四)___。

五、設 x, y, z 皆為實數，其中 $x>y>z$，如果 $(x-y)(y-z)(x-z)=17$，則 $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{x-z}$ 之最小值為 ___(五)___。

六、已知實數 a, b, x, y 滿足方程

$$\begin{cases} ax+by=3 \\ ax^3+by^3=5 \\ ax^5+by^5=11 \\ ax^7+by^7=29 \end{cases}$$

則 $ax^{11}+by^{11}$ 之值為 ___(六)___。

【口試題】試求出滿足 $a^2+b^2=n!$ 的所有解，其中a,b,n為正整數，滿足 $a \leq b$ 且$n<14$。

【口試題】試求所有正整數x,y，使得$x^2+3655=2^y$。

112學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）參考解答

注意事項：

(1) 作答時間：2小時，不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分49分，第一題9分，其餘題目各10分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答。

一、已知x, y, z皆為實數，且滿足聯立方程組

$$\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=-1 \\ xy^2+yz^2+zx^2=5 \\ xyz=-2 \end{cases}$$

試求滿足這樣條件之所有$x+y+z$之值。

【參考解答】Ans: $x+y+z=2$或$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

令$a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$，因此$abc=1$，再用原方程組第三式分別去除以第一式及第二式後，故原方程組可得

$$\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=-1 \\ xy^2+yz^2+zx^2=5 \\ xyz=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \\ a+b+c=-\frac{5}{2} \\ abc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-\frac{5}{2} \\ ab+bc+ca=\frac{1}{2} \\ abc=1 \end{cases}$$

所以a, b, c為三次方程式$2x^3+5x^2+x-2=0$之解。又

$2x^3+5x^2+x-2=(2x-1)(x+1)(x+2)=0$，所以三個解為$-1, -2, \frac{1}{2}$。

由於對稱性，為不失去一般性，我們不訪假設$a=\frac{1}{2}$，因此

$a=\frac{1}{2}=\frac{x}{y}\Rightarrow y=2x$，

(1)如果$b=-1=\frac{y}{z}\Rightarrow z=-y=-2x$，

所以$-2=xyz=x\cdot 2x\cdot(-2x)=-4x^3\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, y$=\sqrt[3]{4}, z=-\sqrt[3]{4}$

(2) 如果 $b=-2=\frac{y}{z}\Rightarrow y=-2z=2x\Rightarrow -2=x\cdot(-2x)\cdot(-x)\Rightarrow x^3=-1$ ，

所以 $x=-1, y=2, z=1\Rightarrow x+y+z=2$ 。

由上述知，$x+y+z=2$ 或 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

二、設 a,b,c 為正整數，使得 $(b-\frac{1}{a})(c-\frac{1}{b})(a-\frac{1}{c})$ 為整數，試求滿足這樣條件的所有可能 a,b,c 之值。

【參考解答】Ans: $(a,b,c)=(2,3,5)$ 或 $(1,1,c)$

由題目的對稱性，為不失去一般性，我們不妨假設 $a\le b\le c$ ，

$\because (b-\frac{1}{a})(c-\frac{1}{b})(a-\frac{1}{c})$ 為整數

$\Rightarrow abc\mid(ab-1)(bc-1)(ca-1)$

$\Rightarrow abc\mid a^2b^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2+ab+ac+bc-1$

$\Rightarrow abc\mid ab+ac+bc-1$

$\Rightarrow abc\le ab+ac+bc-1<ab+ac+bc\le c(a+a+b)$

$\Rightarrow ab<2a+b\le 3b$

$\Rightarrow a<3$

(1)若 $a=1$ ，則 $bc\mid b+c-1$

$\Rightarrow bc-b-c+1=(b-1)(c-1)\le 0$

$\Rightarrow b=1$

此時 c 為任意正整數。

如果 $c=1$ ，但 $b\le c$ ，此時 $b=1$

(2)若 $a=2$ ，則 $2bc\mid bc+2b+2c-1$

$\Rightarrow bc\le 2b+2c-1<2b+2c\le 4c$

$\Rightarrow b<4$

若 $b=2$ ，則 $4c\mid 4c+3\ \Rightarrow\ 4c\mid 3$ 。（不合）

若 $b=3$ ，則 $6c\mid 5c+3\ \Rightarrow\ c\le 5$ 。

一一檢驗後，得 $c=5$ 。

所以，$(a,b,c)=(2,3,5)$ 或 $(1,1,c)$ ，其中 c 為任意正整數。

由題目的對稱性，a,b,c 的順序可以調換。

三、如果A,B,C是三角形ABC的三個內角，試證:

$$-1 \le \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \le \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

並確定等號是否成立及何時成立。

【參考解答】Ans: $A = B = 20^0,\ C = 140^0$。

因為不等式對於角A,B,C有對稱性，不失一般性可假設$A \le B \le C$。

(1) （證明下界）因為$A \le 60^0$，有$\sin 3A \ge 0$；又$\sin 3B \ge -1, \sin 3C \ge -1$，可得

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \ge -2。$$

而等號成立，必須$\sin 3A = 0, \sin 3B = -1, \sin 3C = -1$，即$A = 0^0, B = C = 90^0$。這不構成一個三角形，所以此等號不成立，也就是

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C > -2。$$

(2) （證明上界）因為

$$\sin 3A + \sin 3B = 2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(B-A)}{2} \le 2\sin\frac{3(A+B)}{2},$$

令$\alpha = \frac{3}{2}(A+B)$，則

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \le 2\sin\alpha + \sin(540^0 - 2\alpha) = 2\sin\alpha + \sin 2\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\,(1+\cos\alpha) = 8\sin\frac{\alpha}{2}cos^3\frac{\alpha}{2} = 8\sqrt{sin^2\frac{\alpha}{2}cos^6\frac{\alpha}{2}}, (0^0 < \frac{\alpha}{2} \le 90^0)。$$

又因為

$$3sin^2\frac{\alpha}{2}cos^6\frac{\alpha}{2} = 3sin^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\le \left(\frac{3sin^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\alpha}{2}}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

因此

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \le 8\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

等號成立，之充要條件為 $\cos\frac{3(B-A)}{2} = 1$且$3sin^2\frac{\alpha}{2} = cos^2\frac{\alpha}{2}$，即$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$，$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$且

$\frac{3(B-A)}{2} = 0^0$。解得$A = B = 20^0,\ C = 140^0$。

四、某運動會連續舉辦了$n(n>1)$天，總共發出m面獎牌。第一天發出1面以及剩下$m-1$面獎牌的$\frac{1}{13}$，第二天發出2面以及剩下獎牌的$\frac{1}{13}$，之後每天均按此規律發出獎牌，在最後一天即發出剩下的n面獎牌。試問此運動會共舉辦了幾天？一共發出幾面獎牌？

【參考解答】$n=12$，$m=144$。

設運動會舉辦k天後還剩a_k面獎牌，因為第k天發出的獎牌數為

$$k+\frac{1}{13}(a_{k-1}-k)$$

所以

$$a_k=a_{k-1}-\left(k+\frac{1}{13}(a_{k-1}-k)\right)\Rightarrow a_k=\frac{12}{13}a_{k-1}-\frac{12}{13}k\cdots\cdots(1)$$

且$a_0=m$，$a_n=0$。首先可將(1)式改寫為

$$a_k+12k=\frac{12}{13}(a_{k-1}+12k)\cdots\cdots(2)$$

再將(2)式改寫為

$$a_k+12k-144=\frac{12}{13}(a_{k-1}+12(k-1)-144)\cdots\cdots(3)$$

令$b_k=a_k+12k-144$，則由(3)式可得$b_k=\frac{12}{13}b_{k-1}$，也就是說$\{b_k\}$是公比為$\frac{12}{13}$之等比數列。其首項$b_0=a_0+0-144=m-144$，末項為

$$b_n=a_n+12n-144=0+12n-144=12n-144$$

由$\{b_k\}$為等比數列可得

$$12n-144=b_n=b_0r^n=(m-144)\left(\frac{12}{13}\right)^n$$

整理可得

$$m=144+\frac{13^n(n-12)}{12^{n-1}}$$

由m為整數可知$12^{n-1}|13^n(n-12)$，但12^{n-1}與13^n互質，所以

$$12^{n-1}|(n-12)$$

又$n>1$時有

$$-12^{n-1}+12\le 0<n\le C_0^{n-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=(1+1)^{n-1}<12^{n-1}+12$$

故 $0\le\left|\frac{n-12}{12^{n-1}}\right|<1$，又 $12^{n-1}|(n-12)$，

解得$n=12$，$m=144$。

五、 設A為一個由正整數構成的集合，其中A中的任意兩個元素x、y皆滿足

$|x-y| \geq \frac{xy}{31}$，試求A至多有多少個元素?

【參考解答】Ans: 10

設$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, , \ldots\}$，且設$a_{i+1} = a_i + d_i$，其中$d_i$為正整數。

若設$a_k > a_l \geq 31$，則因$a_k - a_l \geq \frac{a_k a_l}{31}$，

可得$(a_k + 31)(a_l - 31) + 961 \leq 0$，與$a_k > a_l \geq 31$矛盾。

故A中至多有一個元素≥ 31。

由$a_{i+1} - a_i = d_i \geq \frac{(a_i + d_i)a_i}{31}$，可得$d_i \geq \frac{{a_i}^2}{31 - a_i}$。

如果要使A盡量大，a_i與d_i需盡可能的小。

可知 1, 2, 3, 4, 5, 6 可屬於A，可設$a_6 = 6$，

故$d_6 \geq \frac{36}{31-6} = \frac{36}{25}$，可取$d_6 = 2$及$a_7 = 8$。

故$d_7 \geq \frac{49}{31-8} = \frac{49}{23}$，可取$d_7 = 3$及$a_8 = 11$。

故$d_8 \geq \frac{121}{31-11} = \frac{121}{20}$，可取$d_8 = 7$及$a_9 = 18$。

故$d_9 \geq \frac{324}{31-18} = \frac{324}{13}$，可取$d_9 = 25$及$a_{10} = 43$。

因a_{10}至少為 43，已大於 31，故A至多有 10 個元素。

112學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）參考解答

注意事項：

(1)作答時間：1 小時，不可使用電算器。

(2)本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3)請將答案及演算結果依序寫在答案卷上。

(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5)需使用黑色或藍色筆作答。

一、設 $f(x)$ 為一個 2023 次多項式，如果

$f(1)=0, f(2)=1, f(4)=2, \cdots, f(2^{2023})=2023$ ，則多項式 $f(x)$ 的 x 項之係數為 _____ 。

【參考解答】**Ans:** $2-\frac{1}{2^{2022}}$

根據題意，設 $g(x)=f(2x)-f(x)$ ，因此 $g(1)=f(2)-f(1)=1-0=1$ ，

$g(2)=f(4)-f(2)=2-1=1,$

$g(2^2)=f(2^3)-f(2^2)=3-2=1.$

$g(2^3)=f(2^4)-f(2^3)=4-3=1.\cdots,$

$g(2^{2022})=f(2^{2023})-f(2^{2022})=2023-2022=1$

由上述可得 $g(2^k)-1=0$ ，其中 $k=0,1,2,3,\cdots,2022$ 。又

令 $g(x)=c(x-2^0)(x-2^1)\cdots(x-2^{2022})+1$ ，其中 c 為常數。又

$g(x)-1=c(x-2^0)(x-2^1)\cdots(x-2^{2022})=f(2x)-f(x)$

欲求 c 值，因為 $g(0)=f(0)-f(0)=0$ ，

$\Rightarrow -1=c(-2^0)(-2^1)(-2^2)\cdots(-2^{2022})=-c\times 2^{0+1+2+\cdots+2022}$

$\Rightarrow c=2^{-1011\times 2023}$

又 $g(x)-1$ 與 $f(x)$ 有相同的 x 項之係數，所以 $f(x)$ 的 x 項之係數為

$c(-2^0)(-2^1)(-2^2)\cdots(-2^{2022})[(-2^0)+(-2^{-1})+(-2^{-2})+\cdots+(-2^{-2022})]$

$=2-\frac{1}{2^{2022}}$

二、設多項式 $p(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，其中$a,\ b,\ c,\ d,\ e$為實數，且$p(1)=112$，$p(2)=224$，$p(3)=336$，$p(4)=448$，則 $p(11)-p(-6)=$_____。

【參考解答】**Ans: 87584**

設$g(x)=p(x)-112x$，由題意知$g(1)=0$，$g(2)=0$，$g(3)=0$，$g(4)=0$，且剩下的一個根為實數。

可設$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-r)$。

可得$p(11)-p(-6)=g(11)-g(-6)+112\times 11-112\times(-6)=10\times 9\times 8\times 7\times(11-r)+7\times 8\times 9\times 10\times(6+r)+112\times 17=7\times 8\times 9\times 10\times 17+1904=87584$。

三、設$f(x)$為一個 n 次多項式，對於$k=0,1,2,\ldots,n$，都滿足$f(k)=\frac{k}{k+1}$，則 $f(n+1)=$_____。

【參考解答】Ans: $f(n+1)=\begin{cases}1, & \text{當 } n\text{為正奇數}\\ \frac{n}{n+2}, & \text{當}n\text{為正偶數}\end{cases}$。

令$F(x)=(x+1)f(x)-x$，則$F(x)$是一個 n+1 次多項式，且$0,1,2,\ldots,n$是$F(x)$的 n+1 個根；因此可知

$$F(x)=(x+1)f(x)-x=ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)。$$

其中 a 是一個常數。令$x=-1$，可得$F(-1)=1=a(-1)^{n+1}(n+1)!$以及

$$a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$f(x)=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)+x}{x+1}。$$

所以，得

$$f(n+1)=\begin{cases}1, & \text{當 } n\text{為正奇數}\\ \frac{n}{n+2}, & \text{當}n\text{為正偶數}\end{cases}。$$

四、已知三角形 ABC 之三邊長為連續正整數，如果最大角的度數是最小角度數的2倍，則此 ΔABC 最大邊長為_____。

【參考解答】: **Ans: 6**

設 ΔABC 的三邊長為 $a=k-1, b=k, c=k+1$，且

最大內角為 $\angle C$，最小內角為 $\angle A$，

則 $\cos C=\dfrac{k^2+(k-1)^2-(k+1)^2}{2k(k-1)}=\dfrac{k^2-4k}{2k(k-1)}=\dfrac{k-4}{2(k-1)}$

又 $\cos A=\dfrac{k^2+(k+1)^2-(k-1)^2}{2k(k+1)}=\dfrac{k^2+4k}{2k(k+1)}=\dfrac{k+4}{2(k+1)}$

由 $\cos C=\cos 2A=2\cos^2 A-1$ 知 $\dfrac{k-4}{2(k-1)}=2(\dfrac{k+4}{2(k+1)})^2-1$

$2k^3-7k^2-17k+10=0 \Rightarrow (k-5)(k+2)(2k-1)=0 \Rightarrow k=5$

故 ΔABC 的三邊長為 4、5、6

五、設 x, y, z 皆為實數，其中 $x>y>z$，如果 $(x-y)(y-z)(x-z)=17$，則 $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{x-z}$ 之最小值為_____。

【參考解答】**Ans:** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{68}}$

首先，令 $a=x-y, b=y-z \Rightarrow x-z=a+b$，因此原式

$\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{x-z}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+b}=4\cdot\dfrac{a+b}{4ab}+\dfrac{1}{a+b}$，利用算幾不等式，得

$4\cdot\dfrac{a+b}{4ab}+\dfrac{1}{a+b}\geq 5\sqrt[5]{\dfrac{(a+b)^3}{256a^4b^4}}$，因為 $ab(a+b)=17$，

原題欲求 $5\sqrt[5]{\dfrac{(a+b)^7}{256\cdot 17^4}}$ 的最小值，亦即求 $a+b$ 的最小值，利用算幾不等式，得 $17=ab(a+b)\leq\dfrac{(a+b)^3}{4}$，

上述等式成立之充要條件為 $a=b$，又 $a+b=\sqrt[3]{68} \Rightarrow a=b=\dfrac{\sqrt[3]{68}}{2}$

故 $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{x-z}$ 之最小值為 $\dfrac{5}{\sqrt[3]{68}}$。

六、已知實數 a, b, x, y 滿足方程

$$\begin{cases} ax+by=3 \\ ax^3+by^3=5 \\ ax^5+by^5=11 \\ ax^7+by^7=29 \end{cases}$$

則 $ax^{11}+by^{11}$之值為_____。

【參考解答】Ans: 245

可先令$S_n = ax^{2n-1}+by^{2n-1}, n=1,2,\cdots$

則$S_{n+2} = ax^{2n+3}+by^{2n+3}$

$$= (ax^{2n+1}+by^{2n+1})(x^2+y^2) - x^2y^2(ax^{2n-1}+by^{2n-1})$$

$$= (x^2+y^2)S_{n+1} - x^2y^2S_n$$

由原方程組可知

$$\begin{cases} 11 = 5(x^2+y^2) - 3x^2y^2 \\ 29 = 11(x^2+y^2) - 5x^2y^2 \end{cases}$$

所以$x^2+y^2 = 4, x^2y^2 = 3$

故$ax^{11}+by^{11} = S_6 = (x^2+y^2)S_5 - x^2y^2S_4$

$$= (x^2+y^2)^2S_4 - x^2y^2(x^2+y^2)S_3 - x^2y^2S_4$$

$$= 16\times 29 - 12\times 11 - 3\times 29 = 245$$

112學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）填充題答案

一、 $2-\frac{1}{2^{2022}}$

二、 **87584**

三、 $f(n+1)=\begin{cases}1, & \text{當 } n\text{為正奇數} \\ \frac{n}{n+2}, & \text{當} n\text{為正偶數}\end{cases}$

四、 **6**

五、 $\frac{5}{\sqrt[3]{68}}$

六、 **245**

【口試題】試求出滿足 $a^2+b^2=n!$ 的所有解，其中a,b,n為正整數，滿足

$a \le b$ 且$n<14$。

【參考解答】

(1) 當$n=1$時， 無解。當$n=2$時，$a^2+b^2=2$，因此$a=b=1$。

(2) 當$n=3$時， 從$3 \mid n!$可得

$$3 \mid a^2+b^2。$$

如果 a 和 b 都不被 3 整除，則a^2和b^2都屬於$3k+1$型（表示此數為 3 的倍數加 1），所以違反$3 \mid a^2+b^2$。如果 a 和 b 只有一個被 3 整除，同理違反$3 \mid a^2+b^2$。因此，若有解則 a 和 b 都可被 3 整除，並且可得

$$9 \mid a^2+b^2=n!，$$

必須$n \ge 6$， 因此無解。同理，因為3|4!、3|5!，所以，當$n=4,5$時也無解。

(3) 當$n=6$時， 若有解，則$a^2+b^2=6!=2^4\times 3^2\times 5$。可假設$a=3p,b=3q$，$p,q$為正整數，並可得$p^2+q^2=2^4\times 5$。此時，用反證法可知$p,q$都是偶數，並可假設 p=$2u,q=2v$， u,v為正整數，且滿足$u^2+v^2=2^2\times 5$。同理可知u,v都是偶數，並可假設$u=2x,v=2y$，x,y為正整數，且滿足$x^2+y^2=5$。由$a \le b$ 可知$x \le y$，進而得到$x=1,y=2$，因此$a=12,b=24$。

(4) 當$7 \le n<14$時，若有解，從$7 \mid n!$可得

$$7 \mid a^2+b^2。$$

若a不被7整除，則a^2屬於$7k+1,7k+2$或$7k+4$型之一。此時若b被 7 整除，則a^2+b^2屬於$7k+1,7k+2$或$7k+4$型之一；若b不被 7 整除，則b^2也屬於$7k+1,7k+2$或$7k+4$型之一，故a^2+b^2屬於$7k+2,7k+3,7k+4,7k+5$或$7k+6$型之一，也就違反$7 \mid a^2+b^2$。因此，$7 \mid a$。同理，可證得$7 \mid b$。此時，可得$49 \mid a^2+b^2=n!$，必須滿足$n \ge 14$，與題目條件不符合。因此，當$7 \le n<14$時，無解。

綜合以上，原方程有兩組解：$a=1,b=1,n=2$ 和 $a=12,b=24,n=6$。

【口試題】試求所有正整數x,y，使得$x^2+3655=2^y$。

【參考解答】

因為對於非負整數k，有

$$2^{2k+1}=4^k\times 2\equiv(-1)^k\times 2\equiv 2 \text{ 或 } 3(mod\ 5)$$

又$x^2\equiv 0$ 或 1 或 $4(mod\ 5)$。所以y一定是偶數。令$y=2z$，帶入原方程式可得$(2^z-x)(2^z+x)=3655=5\times 17\times 43$，則

$\begin{cases}2^z+x=3655\\2^z-x=1\end{cases}$ 無正整數解

$\begin{cases}2^z+x=215\\2^z-x=17\end{cases}$ 無正整數解

$\begin{cases}2^z+x=731\\2^z-x=5\end{cases}$ 無正整數解

$\begin{cases}2^z+x=85\\2^z-x=43\end{cases}\Rightarrow 2^z=64\Rightarrow z=6$

所以，$x=21,y=2z=12$。

112學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區(高雄區)　筆試(一)　編號:_____

注意事項:

(1)時間分配:2小時

(2)本試卷共四題,滿分49分。第一題12分,第二題12分,第三題12分,第四題13分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

一、求函數$f(x)=[1-x]+[x-1]+\left[\frac{2x}{3}\right]+[2x], 112\le x\le 2023$

可能的函數值的個數。(符號$[a]$表示不大於實數a的最大整數)

二、設x,y均為正整數,求方程式$15^x-7\cdot 2^y-1=0$的所有解?

三、在△ABC中,$\overline{BC}=a$,$\overline{CA}=b$,若$\angle ABC=20^0$且$\angle CAB=40^0$,

求$\frac{a^3-b^3-5ab^2}{a^3-b^3+6ab^2}$之值。

四、已知$f(x)$是定義域和值域都是實數值的函數,$f(0)=0, f(1)=1$,

且滿足對實數$x\neq 0$且$x\neq 1$,恆有$f(x)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=x+1$,

求$f(\sqrt{3}-1)+f(\sqrt{3}+1)$之值。

112學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（高雄區）　　筆試（二）　　編號：_____

注意事項：
(1)時間分配：1小時
(2)本試卷共7題，每題3分滿分21分。
(3)不可使用電算器。
(4)將答案填入答案欄內。
(5)答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

填充題答案欄:

1._____　　2._____　　3._____

4._____　　5._____　　6._____

7._____

112學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　筆試（二）

1.設a,b,c均為實數，且滿足 $a+3b+2c=0$且$a^2+b^2+4c^2=22$，若$b^2-8b+17$的最小值為n而最大值為m，求$n+m$之值為_____

2.設$f(x)=x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x+1$，則$f(x^{2023})$除以$f(x)$的餘式為_____

3.設n為正整數，若n^2的十位數字為0，求n^2所有可能不同的個位數字的和為_____

4.設a為正整數且a^4-96a^2+2500為質數，則$4a-2=$_____

5.不等式 $log_2(2^x+32)<log_2 6+1+\frac{x}{2}$ 的解為$a<x<b$，求$a+b=$_____

6.假設R,r,P分別代表一個三角形的外接圓半徑、內接圓半徑和周長。求 $\frac{Rr}{P^2}$ 的最大值為_____。

7.從1, 3, 5, ..., 2023這些奇數中，最多可取幾個數使得任意三個數的和均為21的倍數？_____

112學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄）　筆試（一）{參考解答}

一、求函數$f(x)=[1-x]+[x-1]+\left[\frac{2x}{3}\right]+[2x], 112\le x\le 2023$

可能的函數值的個數。(符號$[a]$表示不大於實數a的最大整數)

【參考解答】考慮區間$[0,3)$, 我們會發現

$f(x)$ 0, (0,0.5), [0.5,1),1, (1,1.5), [1.5,2),2,(2,2.5), [2.5,3)等點或區間的函數值分別為$0,-1,0,2,1,3,5,4,5$，而且滿足條件$f(x+3)=f(x)+8$。

2023 - 112 = 3 x 637，所以在區間$[112,2023)$中會有 7*637=4459 個函數值，而在$x=$ 2023 又會多 1 個函數值，所以總共是 4460 個。

二、設x,y均為正整數，求方程式$15^x-7\cdot 2^y-1=0$的所有解?

【參考解答】$\frac{15^x-1}{15-1}=2^{y-1}$

$15^{x-1}+15^{x-2}+\cdots+1=2^{y-1}$, 如果$y=1$，則$x=1$

設$y>1$，方程式左邊為x個奇數相加，故x必為偶數

$15^{x-2}(15+1)+15^{x-4}(15+1)+\cdots+(15+1)=2^{y-1}$

$15^{x-2}+15^{x-4}+\cdots+1=2^{y-5}$

故應有 $y\ge 5$。如果$y=5$，則$x=2$

如果 $y>5$, 方程式左邊為$x/2$個奇數相加，故x必為4的倍數

$15^{x-4}(15^2+1)+15^{x-8}(15^2+1)+\cdots+(15^2+1)=2^{y-5}$

$(15^2+1)(15^{x-4}+15^{x-8}+\cdots+1)=2^{y-5}$

即 $226|2^{y-5}$，不可能。因此$y>5$方程式無正整數解

故方程式的正整數解為(1, 1)及(2, 5)

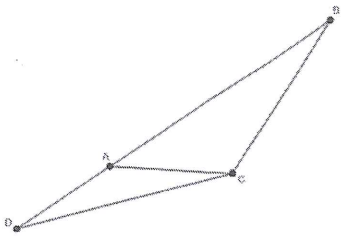
三、在△ABC中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，若$\angle ABC=20^0$且$\angle CAB=40^0$，

求 $\frac{a^3-b^3-5ab^2}{a^3-b^3+6ab^2}$ 之值。

【參考解答】 由餘弦定理知

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ}$

$=\sqrt{a^2+b^2+ab}$



如圖，在$\overrightarrow{BA}$上取D點使得

$\overline{AD}=\overline{CA}=b$，則$\Delta ACD$是等腰三角形

且$\angle ADC=\angle ACD=20^\circ$，

故$\angle CAD=140^\circ$ 。

在ΔBCD中，$\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{AD}$

因為$\angle BDC=\angle CBD=20^\circ$，

故可推得 $\overline{CD}=\overline{BC}=a$ 且 $\Delta BCD\sim\Delta DAC$ (AA 相似)

由此知 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}}$ 即 $\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a}=\dfrac{a}{b}$

上式經展開可得 $b\sqrt{a^2+b^2+ab}=a^2-b^2$

經計算整理可得 $a^3-b^3=3ab^2$ 故 $\dfrac{a^3-b^3-5ab^2}{a^3-b^3+6ab^2}=\dfrac{-2ab^2}{9ab^2}=-\dfrac{2}{9}$

四、已知$f(x)$是定義域和值域都是實數值的函數，$f(0)=0, f(1)=1$，

且滿足對實數$x\neq 0$且$x\neq 1$，恆有$f(x)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=x+1$，

試求$f\left(\sqrt{3}-1\right)+f\left(\sqrt{3}+1\right)$之值。

【參考解答】:

對實數$x\neq 0$且$x\neq 1$， $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=x+1$ ……(1)

因為$\dfrac{x-1}{x}\neq 0$且$\dfrac{x-1}{x}\neq 1$，所以由(1)可得

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}\right)=\frac{x-1}{x}+1$$

即 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2-\frac{1}{x}$ ……(2)

因為 $\frac{1}{1-x}\neq 0$ 且 $\frac{1}{1-x}\neq 1$，所以由(1)可得

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}\right)=\frac{1}{1-x}+1$$

即 $f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{1}{1-x}+1$ ……(3)

(3)－(2) 可得

$$f(x)-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x^2-x+1}{x(1-x)} \quad \cdots\cdots(4)$$

$\frac{(1)+(4)}{2}$ 可推得 $f(x)=\frac{x+1}{2}+\frac{x^2-x+1}{2x(1-x)}=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$

經計算可求得

$$f\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^3-\left(\sqrt{3}-1\right)^2-1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{5\sqrt{3}+3}{4}$$

$$f\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^3-\left(\sqrt{3}+1\right)^2-1}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{7\sqrt{3}+3}{12}$$

故 $f\left(\sqrt{3}-1\right)+f\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{11\sqrt{3}+6}{6}$

112學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（高雄區）　　筆試（二）　　編號：_____

注意事項：
(1)時間分配：1 小時
(2)本試卷共 7 題，每題 3 分滿分 21 分。
(3)不可使用電算器。
(4)將答案填入答案欄內。
(5)答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

填充題答案欄:

1. 42　　2. 2023　　3. 14

4. 26　　5. 10　　6. 1/54

7. 49

112 學年度南區(第 5 區) 高級中等學校數理及資訊學科能力競賽試題(一)

注意事項：

(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共四題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

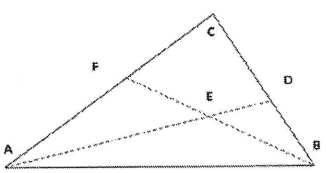
(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答

一、 已知 $m<2023$ 為一個四位數，如果正整數 $n<m$，使得 $m-n$ 最多有三個正因數，且 mn 為完全平方數，試求滿足這樣條件的所有可能 m 值。

二、 如下圖，$\triangle ABC$ 中，AD 與 BF 是 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的內角角平分線，E 為內心，$\triangle ABC$ 邊長分別以 a,b,c 表示，即 $a=BC,b=CA,c=AB$。

證明：$\frac{AE}{ED}=\frac{b+c}{a}$。



三、 試證：在任意 3^{2023} 個正整數中，必存在 2^{2023} 個數的和是 2^{2023} 的倍數。

四、 對於自然數 n，令 $f(n)$ 表示 n 的最大奇因數。 例如：$f(5)=5$, $f(6)=3$。

求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)$ 的值。

112 學年度南區(第 5 區) 高級中等學校數理及資訊學科能力競賽試題(二)

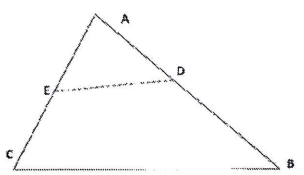
注意事項：
(1)作答時間：1 小時。不可使用電算器。
(2)本試卷共五題填充題，前四題每題 4 分，最後一題 5 分，滿分 21 分。
(3) 請將演算過程依序寫在答案卷上，並將答案依序填入下面「答案」欄位中。
(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。
(5)需使用黑色或藍色筆作答

一、 等腰 $\triangle ABC$ 中，，如果 $\angle ABC$ 的角平分線交 $\overline{AC}$ 邊於 D 點，且

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，試求 $\angle A$。

二、 設 A 是十進位制數 5555^{5554} 的各位數字之總和，B 是 A 的各位數字之總和，C 是 B 的各位數字之總和， A、 B、 C 都是十進位制數字。
求 C 之值。

三、 如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=33$，$\overline{AC}=21$，$\overline{BC}$ 邊長為正整數，
$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}$ 也是正整數，求 $\overline{BC}$ 邊長。



四、 設 $a-b=20+\sqrt{23}$, 且 $b-c=20-\sqrt{23}$，則

$$a^2+b^2+c^2-ca-ab-bc$$

的值為何？

五、 自 1 到 10000 中消去所有 5 的倍數，也消去所有 11 的倍數，則消去後剩下數的第 2023 個數為何？

112 學年度南區(第 5 區) 高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

口試試題

【口試題 1】

解聯立方程組 $\begin{cases} y = x^3(3-2x) \\ z = y^3(3-2y) \\ x = z^3(3-2z) \end{cases}$

【口試題 2】

從 $\{-2023, -2022, -2021, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, 2021, 2022, 2023\}$ 中取出四個不同的數，其中兩個為正數，另兩個為負數，且其和為零，問有幾種取法？

112 學年度南區(第 5 區) 高級中等學校數理及資訊學科能力競賽試題(一)
試題暨詳解

一、 已知 $m<2023$ 為一個四位數，如果正整數 $n<m$，使得 $m-n$ 最多有三個正因數，且 mn 為完全平方數，試求滿足這樣條件的所有可能 m 值。

【參考解答】 $m=1156,1296,1369,1377,1600,1764,1900$

因為 $m-n$ 至多有三個正因數，則 $m-n=p^k$，p 為質數且 $k=0,1,2$。

(1)當 $k=0$，則 $mn=n(n+1)$ 為完全平方數（與題意不合）

令 $mn=t^2$，其中 t 為正整數，又 $m-n=p^k, k=1$ 或 2，

則 $n(n+p^k)=t^2 \Leftrightarrow (2n+p^k-2t)(2n+p^k+2t)=p^{2k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+p^k-2t=p^s \\ 2n+p^k+2t=p^r \end{cases}$$，r、s 為整數，且 $0\le s<r\le 2k$, 且 $r+s=2k$

(2)當 $k=1$，所以

$$\begin{cases} 2n+p-2t=1 \\ 2n+p+2t=p^2 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{p^2-1}{4} \Rightarrow n=\frac{(p-1)^2}{4},\ m=n+p=\frac{(p+1)^2}{4}$$

又 $1000\le m=\frac{(p+1)^2}{4}<2023$，

$\Rightarrow$ $m=1156,1296,1369,1600,1764$ $(p=67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83)$

(3)當 $k=2$，則 $(r,s)=(4,0)$ 或 $(r,s)=(3,1)$

如果 $(r,s)=(4,0)$ $\begin{cases} 2n+p^2-2t=1 \\ 2n+p^2+2t=p^4 \end{cases} \Rightarrow n=\frac{(p^2-1)^2}{4},\ m=n+p^2=\frac{(p^2+1)^2}{4}$

又 $1000\le m=\frac{(p^2+1)^2}{4}<2023 \Rightarrow 62\le p^2<88 \Rightarrow 7<p<9$，(不合)

如果 $(r,s)=(3,1) \Rightarrow n=\frac{p(p-1)^2}{4}$ $\Rightarrow$ $m=\frac{p(p+1)^2}{4}$

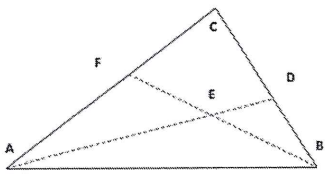
$\Rightarrow$ $m=1377$ 或 1900 $(p=17$ 或 $19)$

■

二、 如下圖，$\triangle ABC$ 中，AD 與 BF 是 $\angle A$ 與$\angle B$ 的內角角平分線，E 為內心，$\triangle ABC$ 邊長分別以 a,b,c 表示，

即 $a=BC, b=CA, c=AB$。

證明：$\frac{AE}{ED}=\frac{b+c}{a}$ 。



【參考解答】

因為 AD 是∠A 的內角分角線，所以給符號 ∠FAE=∠BAE=α。

△ABF = △ABE + △AFE

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot AB \cdot AF = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AB \cdot AE + \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AF \cdot AE$$

$$\frac{2\cos\alpha}{AE} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AB}$$

同理，△ABC = △ABD + △ACD

$$\frac{2\cos\alpha}{AD} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$$

兩式相除得到

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC(AB+AF)}{AF(AC+AB)}$$

分比性質

$$\frac{AD-AE}{AE} = \frac{AC(AB+AF)-AF(AC+AB)}{AF(AC+AB)}$$

$$\frac{ED}{AE} = \frac{AB(AC-AF)}{AF(AC+AB)} = \frac{AB}{AF}\cdot\frac{CF}{AC+AB}$$

BF 是∠B 的內角分角線

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{CF}\text{，}\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{CF}$$

所以

$$\frac{ED}{AE} = \frac{BC}{CF}\cdot\frac{CF}{AC+AB} = \frac{BC}{AC+AB} = \frac{a}{b+c}$$

故原式得證。 ■

三、 試證：在任意 3^{2023} 個正整數中，必存在 2^{2023} 個數的和是 2^{2023}的倍數。

【參考解答】

證明，不只是 2023，任何 n 都對！

(1) 當 $n=1$ 時，在任意 3 個正整數 x,y,z 中，必有兩個數有相同的奇偶性，其和為 2 的倍數。

(2) 當 $n=k$ 時，假設命題成立，即：在任意 3^k 個正整數中，必存在 2^k 個數，其和是2^k的倍數。

當$n=k+1$時，對任意 3^{k+1} 個正整數，先平分成三堆，每一堆各有 3^k 個正整數。依歸納假設，每堆各存在 2^k 個數，其和是 2^k 的倍數。

可設第一堆中 2^k個數之和為 $S_1=2^kx$，第二堆中的2^k個數之和為 $S_2=2^ky$，第三堆中的2^k個數之和為 $S_3=2^kz$，其中 x,y,z 為正整數。

因 x,y,z 中，必有兩個數有相同的奇偶性；不失一般性，設 x,y 同為奇數或同為偶數，則 $x+y$ 是 2 的倍數，可令 $x+y=2m$。

因此，第一堆和第二堆中，一共找出的 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 個數之和等於 $S_1+S_2=2^kx+2^ky=2^{k+1}m$ 為 2^{k+1} 的倍數。得證。

■

四、對於自然數 n，令 $f(n)$ 表示 n 的最大奇因數。例如$f(5)=5,\ f(6)=3$。
求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)$ 的值。

【參考解答】 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)=1365399$

每個自然數 n 都可寫成 $2^{a_n}\times p_n$ 形式，其中a_n為自然數，p_n 為奇數。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2
p_n	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	11	3

(1) 其中有 $2023-\left\lfloor\frac{2023}{2}\right\rfloor=1012$個 n，使得$a_n=0$，而這 1012 個數的奇數部分恰為 1, 3, 5, …., 2023，也就是 2023 之前的所有奇數。這 1012 個奇數和為 $\frac{(1+2023)1012}{2}=1012^2$。

(2) 其中有$\left\lfloor\frac{2023}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2023}{4}\right\rfloor=506$個 n，使得$a_n=1$，而這 506 個數的奇數部分恰為 1, 3, 5, …., 1011，也就是 1011 之前的所有奇數。這 506 個奇數和為 $\frac{(1+1011)506}{2}=506^2$。

(3) 其中有$\left\lfloor\frac{2023}{2^k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2023}{2^{k+1}}\right\rfloor$個 n，使得$a_n=k$。

一直計算到只有 1 個 n，使得$a_n=10$。
所以和為
$1012^2+506^2+253^2+126^2+63^2+32^2+16^2+8^2+4^2+2^2+1^2=1365399$

■

112 學年度南區(第 5 區) 高級中等學校數理及資訊學科能力競賽試題(二)
試題暨解答

一、 等腰 $\triangle ABC$ 中，，如果 $\angle ABC$ 的角平分線交 $\overline{AC}$ 邊於 D 點，且 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，試求 $\angle A$。

【參考解答】 $\angle A=\frac{5\pi}{9}$

令 $\angle A=\alpha,\angle ABD=\beta\Rightarrow\angle B=\angle C=2\beta\Rightarrow\alpha=\pi-4\beta$　　為便利計，不妨假設 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$。

由正弦定理知，$\overline{BC}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta},\overline{AD}=\frac{\sin\beta}{\sin 3\beta},\overline{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\beta}$。

由題意知，$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}=\frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sin 3\beta}$

因此可得

$\sin\alpha\sin 3\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)\sin 2\beta\Rightarrow\sin 4\beta\sin 3\beta=\sin 4\beta\sin 2\beta+\sin\beta\sin 2\beta$，

利用積化和差公式，得

$\cos\beta-\cos 7\beta=\cos 2\beta-\cos 6\beta+\cos\beta-\cos 3\beta\Rightarrow\cos 3\beta--\cos 7\beta=\cos 2\beta-\cos 6\beta$

再利用和差化積公式，得

$\sin 5\beta\sin 2\beta=\sin 4\beta\sin 2\beta\Rightarrow\sin 5\beta=\sin 4\beta\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{9}\Rightarrow\alpha=\frac{5\pi}{9}$

■

二、 設 A 是十進位制數 5555^{5554} 的各位數字之總和，B 是 A 的各位數字之總和，C 是 B 的各位數字之總和， A、 B、 C 都是十進位制數字。求 C 之值。

【參考解答】 $C=7$

因為 $5555^{5554}<10000^{5554}=10^{4\times 5554}$，

所以 5555^{5554} 的位數不超過 $4\times 5554=22216$。

因為 A 是十進位制數 5555^{5554} 的各位數字之和，每位數字最大是 9，所以

$A<22216\times 9=199944$。

因為 B 是 A 的各位數字之和，所以

$B<1+5\times9=46$ $(A<199999)$ 。

因為 C 是 B 的各位數字之和，所以

$C<4+9=13$ $(B<49)$ 。

因為 一個數與它的數字和模 9 同餘數，所以

$$5555^{5554}\equiv A\equiv B\equiv C(\text{mod}9)$$
$$\equiv(9\times617+2)^{5554}\equiv2^{5554}\equiv2^{6\times925+4}\equiv(63+1)^{925}\cdot2^4$$
$$\equiv2^4\equiv16\equiv7(\text{mod}9)$$

。

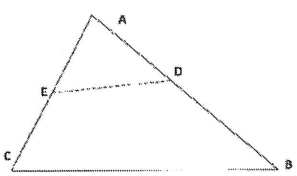
解聯立

$$\begin{cases}C<13\\C\equiv7(\text{mod}9)\end{cases},$$

所以 $C=7$ 。

■

三、 如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=33$，$\overline{AC}=21$，$\overline{BC}$ 邊長為正整數，$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}$ 也是正整數，求 $\overline{BC}$ 邊長。



【參考解答】 30

設 $\overline{BC}=x$，$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}=y$。

(1) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}+\overline{DE}<\overline{AE}$，$y+y>21-y$，$y>7$，

並且，$\overline{AC}<\overline{AC}$，$21>y$，所以， $7<y<21$ 。

(2) 因為 $\triangle ADE$ 為等腰三角形，所以

$$cosA=\frac{AE/2}{y}=\frac{(21-y)/2}{y}=\frac{21-y}{2y}$$

$\triangle ABC$ 中，

$$cosA=\frac{21^2+33^2-x^2}{2\times21\times33}=\frac{1530-x^2}{1386}$$

所以

$$1530y-yx^2=14553-693y$$
$$y(2223-x^2)=14553=3^3\times7^2\times11$$

因為 ，$7<y<21$，所以，$y=9,11$，$x=\sqrt{606},30$

因 $\overline{BC}$ 邊長為正整數，所以 $\overline{BC}$ 邊長為 30 。

四、設$a-b=20+\sqrt{23}$, 且 $b-c=20-\sqrt{23}$，則 $a^2+b^2+c^2-ca-ab-bc$ 的值為何？

【參考解答】 1223

令$S=a^2+b^2+c^2-ca-ab-bc$，則

$$\begin{aligned}2S &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ca-2ab-2bc\\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\ &= \left(20+\sqrt{23}\right)^2+\left(20-\sqrt{23}\right)^2+40^2\\ &= 2446\end{aligned}$$

因此答案為 1223

五、自 1 到 10000 中消去所有 5 的倍數，也消去所有 11 的倍數，則消去後剩下數的第 2023 個數為何？

【參考解答】 2781

在 1~55 之間，消去所有 5 的倍數，也消去所有 11 的倍數之後，只剩下

$$55-\frac{55}{11}-\frac{55}{5}+\frac{55}{55}=55-5-11+1=40\text{個數。}$$

同理，所有(55k+1)~(55 (k+1)) 之間，消完後也只剩 40 個數。

2023/40=50...23。也就是 55*50=2750 之後的第 23 個剩下的數。

因為 $31-\left\lfloor\frac{31}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{31}{11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{31}{55}\right\rfloor=31-6-2+0=23$。

所以 2750+31=2781 為剩下的第 2023 個數。

【口試題1】

解聯立方程組 $\begin{cases} y = x^3(3-2x) \\ z = y^3(3-2y) \\ x = z^3(3-2z) \end{cases}$

參考解答

(1)$x = 0$ ：

所以 $y = z = 0$ 。

(2)$x \geq 3/2$ ：

$y = x^3(3-2x) \Rightarrow y \leq 0$，$z = y^3(3-2y) \Rightarrow z \leq 0$，

$x = z^3(3-2z) \Rightarrow x \leq 0$ 與 $x \geq 3/2$ 產生矛盾，所以，此範圍沒有解。

(3)$0 < x < 3/2$ ：

$x = z^3(3-2z) > 0$，所以，$0 < z < 3/2$

$z = y^3(3-2y) > 0$，所以，$0 < y < 3/2$

$y = x^3(3-2x) \leq x \cdot \left[\frac{x+x+(3-2x)}{3}\right]^3 = x$，所以，$y \leq x$。

同理， $z \leq y$，$x \leq z$，所以，$x = y = z$，$x = x^3(3-2x)$，

$2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$，$(x-1)(2x^2 - x - 1) = 0$，所以，$x = y = z = 1$。

(4)$x < 0$ ：

$y = x^3(3-2x) \Rightarrow y \leq 0$，$z = y^3(3-2y) \Rightarrow z \leq 0$

考慮變換變數：$x = -u$，$y = -v$，$z = -w$，$u > 0$，$v > 0$，$w > 0$，

$$\begin{cases} v = u^3(3+2u) \\ w = v^3(3+2v) \\ u = w^3(3+2w) \end{cases}$$

考慮函數 $f(t) = t^3(3+2t)$，

$f'(t) = 8t^3 + 9t^2$，或是分析 $a > b > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

$t > 0$ 時，是嚴格遞增函數，

所以，$v = f(u)$，$w = f(v)$，$u = f(w)$

如果 u, v, w 兩兩相異，假設 $u > v$

則 $v = f(u) > f(v) = w$，$w = f(v) > f(w) = u$，$u = f(w) > f(u) = v$

則 $v > w > u > v$ 產生矛盾，所以，$u = v = w$ 。

$$u = u^3(3 + 2u)$$
$$1 = 3u^2 + 2u^3$$
$$(2u - 1)(u + 1)^2 = 0$$

所以，$u = \frac{1}{2}$，$x = -\frac{1}{2} = y = z$

綜合 (1), (2), (3), (4)，聯立方程組的答案 (0, 0, 0)，(1, 1, 1)，(-1/2, -1/2, −1/2)。

■

【口試題 2】

從 { -2023, -2022, -2021, …, -2, -1, 1, 2, …, 2023}中取出四個不同的數，其中兩個為正數，另兩個為負數，且其和為零，問有幾種取法？

[參考解答]

對於任意自然數 k，求出兩個不同正數之和為 k 的方法數為下列：

k=3, 4 時, 方法數為 1 種。	k=4045, 4044 時, 方法數為 1 種。
k=5, 6 時, 方法數為 2 種。	k=4043, 4042 時, 方法數為 2 種。
…	…
k=2023, 2024 時, 方法數為 1011 種。	k=2025, 2024 時, 方法數為 1011 種。

同理可找出兩個負數之和為-k 的方法數。既然和為零，所以兩正數與兩負數之和必然只差負號，因此，所有取法為

$$(1^2 * 4 + 2^2 * 4 + \cdots + 1010^2 * 4) + 1011^2 * 3$$

$$= 4 * \frac{1011 * 1012 * 2023}{6} - 1011^2$$

■