114學年度普通型高級中等學校

數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽

決賽總報告

主辦單位：教育部國民及學前教育署
承辦單位：國立彰化師範大學數學系

中華民國114年12月5日至114年12月6日

陸、筆試試題及參考解答

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題（一）

注意事項：

1. 時間分配：2 小時(13:30~15:30)。
2. 配分：每題皆為 7 分。
3. 不可使用計算機。

1、設p, q為兩正整數，$x = \frac{\sqrt{q^2+\frac{4q}{p}}-q}{2}$，證明：若$\frac{1}{x}$的小數部分為$y$，則$\frac{1}{y}$的小數部分是$x$。(註:一個數字$a$的小數部分定義為$a-[a]$，其中$[a]$表示不大於$a$的最大整數。)

2、直線L上依序有 4 個點A, B, C, D，設$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$。證明：

(1) 若直線L外存在一點P使得$\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$， 則

$b^2 < ac$。

(2) 若$\frac{2}{b} > \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$，則直線$L$外存在一點$P$，使得

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPD。$$

3、某國家有 500 個城市與 2025 條雙向道路，每條道路連接兩個城市。若城市A與B之間有一條道路連接，則稱A**鄰接**B；若存在另一城市C，使得A鄰接C且C鄰接B，則稱A**準鄰接**B。要注意A可以既鄰接B，也同時準鄰接B。已知任何兩個城市之間最多只有一條道路，且不存在四個城市A,B,C,D使得A鄰接B、B鄰接C、C鄰接D、D鄰接A。證明：至少存在一個城市，它的準鄰接城市數至少為 58。

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題（一）【參考解答】

1. 【參考解答】

依序證明下面 3 件事

(1) $\frac{1}{x}$的整數部分是p。

(2) 若$y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$，證明$\frac{1}{y}$的整數部分是$q$

(3) $\frac{1}{y}-\left[\frac{1}{y}\right]=x$

$$x=\frac{\sqrt{q^2+\frac{4q}{p}}-q}{2},\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{q^2+\frac{4q}{p}}-q}=p\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{pq}}+\frac{1}{2}\right)>p$$

只需證明

$$p\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{pq}}+\frac{1}{2}\right)<p+1\ldots(*)$$

稍做整理，亦即證明下式

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{p}{q}}<\frac{p}{2}+1$$

兩邊平方再整理可得

$$\frac{p}{q}<p+1$$

因為$q\in\mathbb{N}$，所以上式成立，再反推即可得$\frac{1}{x}$的整數部分是p。

由上證明可得

$$y = p\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{pq}}-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{y} = q\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{pq}}+\frac{1}{2}\right) > q$$

由(*)式可得

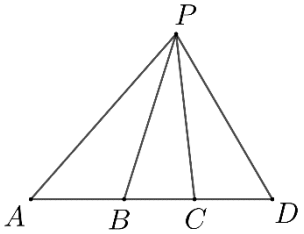
$$q\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{pq}}+\frac{1}{2}\right) < q+1$$

而

$$\frac{1}{y}-\left[\frac{1}{y}\right] = q\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{pq}}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{q^2+\frac{4q}{p}}-q}{2} = x$$

2. 【參考解答】

(1)如右圖所示，由內分角性質可設



$\overline{PA} = ax, \overline{PC} = bx, \overline{PB} = by, \overline{PD} = cy$ 利用餘弦定理

$\cos\theta = \frac{(ax)^2+(by)^2-a^2}{2ax\cdot by} = \frac{(by)^2+(bx)^2-b^2}{2by\cdot bx} = \frac{(bx)^2+(cy)^2-c^2}{2bx\cdot cy}$ ，整理後可得

$a(a-b)x^2 + b(b-a)y^2 = a(a-b)$，

$b(b-c)x^2 + c(c-b)y^2 = c(c-b)\cdots(*)$

若$a = b$($b = c$討論類似)，則$\overline{PB} \perp \overline{AD}$，顯然$\overline{PD} > \overline{PB}$，因此$c > b$，故$b^2 < ac$成立。

若$a \neq b$且$b \neq c$，則$(*)$可化簡為$ax^2 - by^2 = a$和$bx^2 - cy^2 = -c$，進而得$(ac-b^2)x^2 = c(a+b)$ 和$(ac-b^2)y^2 = a(b+c)$，

因此，$ac-b^2>0$，即$b^2<ac$成立。

(2)若$\frac{2}{b}>\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，則$b^2<ac$.若$a=b(b=c$討論類似)，則$c>b$.設$L'$為　過$B$且垂直於$\overline{AD}$的直線，顯然在$L'$上可找到點$P$使得$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=\frac{b}{c}<1$，　此時$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD$，滿足所求。若$a\neq b$且$b\neq c$，此時可借助”阿婆羅圓”來找$P$，設$b<a$（$b<c$討論類似)。

(i) 若$b<a$且$b<c$（此時$\frac{2}{b}>\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$). 所有滿足$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{a}{b}>1$的點$P$形成一個圓(稱阿波羅圓)且使得$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD$，上述兩圓顯然交於兩點，此兩點皆滿足所求。

(ii) 若$b<a$且$b>c$，此時滿足$\frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}=\frac{c}{b}<1$的阿波羅圓與$L$交於$C$和另一點$F$且$F$在$D$的右側，以下證明$F$也在$E$的右側，如此可得證兩圓還是交於兩點，滿足所求。設$\overline{DF}=y$，則滿足$\frac{\overline{FD}}{\overline{FB}}=\frac{y}{y+b+c}=\frac{c}{b}$，得$y=\frac{c(b+c)}{b-c}$，以下證明：$\overline{CF}>\overline{CE}$，即證明$c+y>x$，事實上，

$c+y-x=c+\frac{c(b+c)}{b-c}-\frac{b(a+b)}{a-b}$，

$L=\frac{2bc}{b-c}-\frac{b(a+b)}{a-b}=\frac{b(3ac-b^2-ab-bc)}{(b-c)(a-b)}>\frac{b(2ac-ab-bc)}{(b-c)(a-b)}>0$。

$\left(\because \frac{2}{b}>\frac{1}{a}+\frac{1}{c}, b^2<ac\right)$

3. 【參考解答】

考慮有 500 個頂點與 2025 條邊的圖，不含重邊，也沒有 4-循環。對任一頂點v，設其度數(degree，表與v相連的邊的個數)為d_v。v的準鄰接數$Q(v)$ 為所有與v有距離 2 的不同頂點數量。若u與v鄰接，則u可貢獻$d_u - 1$個與v距離為 2 的頂點（除了v本身）。以$\mathrm{N}(u)$表所有與u鄰接的頂點所成的集合，由於圖中沒有 4-循環，若u_1與u_2都與v鄰接，則$N(u_1) \setminus \{v\}$與則$N(u_2) \setminus \{v\}$交集為空集合，否則會形成一個長度 4 的循環，因此有：

$Q(v) = \sum_{u \in N(v)} (d_u - 1)$。若把$Q(v)$對所有$v$加總，則$\sum_v Q(v) = \sum_v d_v(d_v - 1) = \sum_v d_v^2 - \sum_v d_v$。因為圖中邊數為 2025，所以$\sum_v d_v = 4050$，利用柯西不等式，有：$\sum_v d_v^2 \geq (\sum_v d_v)^2/500 = 4050^2/500 = 32805$，代回得到：$\sum_v Q(v) \geq 32805 - 4050 = 28755$，將此數除以 500，得平均每個頂點的準鄰接數至少為： 28755 / 500 = 57.51。因為準鄰接數$Q(v)$為整數，如果每一個城市的準鄰接數都小於等於 57，那麼全體和最多為 57 × 500 = 28500，這與剛得到的下界 28755 矛盾。因此至少存在一個城市v，使得： $Q(v) \geq 58$。

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題（二）

注意事項：

1. 時間分配：2 小時(16:00~18:00)。
2. 配分：每題皆為 7 分。
3. 不可使用計算機。

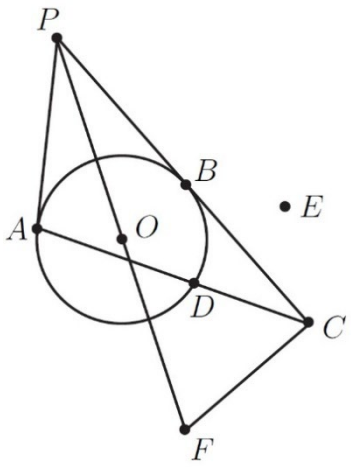
1、設n為大於或等於 3 的正整數。將編號$1, 2, \cdots, n$等n顆球分成三堆的方法總數記為$f(n)$，其中編號 1、2 的兩顆球在不同堆的方法數記為$g(n)$。

（1）求$f(n)$。（以n的函數表示）

（2）證明：$\frac{g(n)}{f(n)} > \frac{2}{3}$。

2、求所有正整數n，使得$114^n - 2025$有一些質因數$p_1 < p_2 < \cdots < p_j$，滿足$p_1 p_2 \cdots p_j - 1$可被 3 整除，且$\sqrt{\frac{114^n - 2025}{p_1 p_2 \cdots p_j}}$為整數。

3、如右圖所示，給定一圓O，P是圓外一點，作兩條切線$\overline{PA}, \overline{PB}$使得$A, B$為切點；在$\overline{PB}$的延長線上取一點$C$，使得$B$介於$P$與$C$之間；設$\overline{AC}$與圓$O$相交於另一點$D$，作$D$對於直線$\overline{PC}$的對稱點$E$；在$\overline{PO}$的延長線上取一點$F$，使得$\overline{FC} \perp \overline{PC}$。證明：$A, E, C, F$四點共圓。



114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

筆試試題（二）【參考解答】

1. 【參考解答】

（1）先作三個不同的盒子來放球，最後把盒子的差異相除，即將總數除以 3!就是答案。利用取捨原理，放入三個有編號的盒子且每個盒子都有球的方法數是$3^n - C_1^3 \cdot 2^n + C_2^3 \cdot 1^n - C_3^3 \cdot 0^n = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$，故所求答案為$\frac{1}{6}(3^n - 3 \cdot 2^n + 3)$（此即為下一小題的$f(n)$）

（註：此數列為$f(3) = 1,6,25,90,301,\cdots$）

（2）用反面計算，知$g(n) = f(n) - f(n-1)$（將 1, 2 視同一體，再扣除之）。故本題等價於比較$\frac{f(n-1)}{f(n)}$與$\frac{1}{3}$的大小。相減可得

$$\frac{f(n-1)}{f(n)} - \frac{1}{3} = \frac{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3}{3^n - 3 \cdot 2^n + 3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{(3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3) - (3^{n-1} - 2^{n-1} + 1)}{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}$$

$$= \frac{-2^{n-1} + 2}{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}$$

此值在$n \geq 3$時皆小於 0，故對所有的$n \geq 3$，都有$\frac{g(n)}{f(n)} > \frac{2}{3}$ 。

（同時有 $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{2}{3}$ ）

2. 【參考解答】

顯然$p_1,\ldots,p_j>3$. 當$n=2$ 時，

$114^2-2025=114^2-45^2=3^2(38+15)(38-15)=3^2\cdot 23\cdot 53$，

此時$j=2$ 且 $(n,p_1,p_2)=(2,23,53)$滿足條件。（可給 1 分。）

以下討論$n\geq 3$。令正整數m滿足$114^n-2025=p_1\cdots p_j m^2$. 既然$n$為正整數，可得到$3|m^2$，故3|m。

令$m=3k\,(k\in N)$，上式可整理得到$3^{n-2}\cdot 38^n-225=p_1\cdots p_j k^2$，

可得到$3|k^2\Rightarrow 9|k^2\Rightarrow 9|3^{n-2}\cdot 38^n\Rightarrow 9|3^{n-2}\Rightarrow n\geq 4$。

另一方面，整理上式得到$3^{n-4}\cdot 38^n-25=p_1\cdots p_j\left(\frac{k}{3}\right)^2$。若$n\geq 5$，則$3|25+p_1\cdots p_j\left(\frac{k}{3}\right)^2$. 既然$p_1p_2\cdots p_j\equiv 1\pmod 3$，可得到

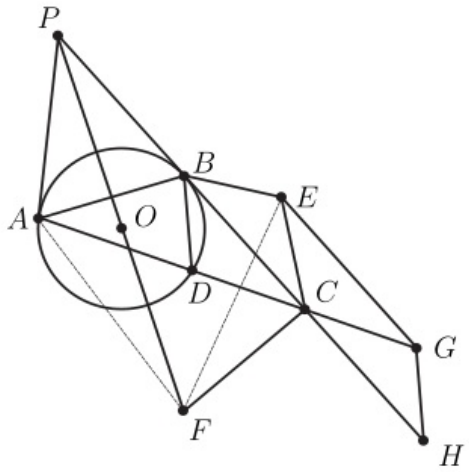
$0\equiv 25+p_1p_2\cdots p_j\left(\frac{k}{3}\right)^2\equiv 1+\left(\frac{k}{3}\right)^2\pmod 3$，但完全平方數除以 3 的餘數只可能 0 或 1，矛盾，故$n\leq 4$.

當$n=4$時，

$$114^2-2025=(114^2+45)(114^2+45)=3^4(38^2+5)(38^2-5)$$
$$=3^6\cdot 7\cdot 23\cdot 1439$$

（很容易檢驗 1439 為質數），此時$j=3$且$(n,p_1,p_2,p_3)=(4,7,23,1439)$滿足條件。

3. 【參考解答】



如圖所示，延長 $\overline{DC}$ 取 G 使得 $\overline{CD}=\overline{CG}$，延長 $\overline{BC}$ 取 H 使得 $\overline{BC}=\overline{CH}$。連接 $\overline{AB}$, $\overline{EB}$, $\overline{ED}$,$\overline{EG}$。

● 證明： $\Delta CDB\cong\Delta CEB$。

因為 E 是 D 對於 $\overline{BC}$ 的對稱點；也就是說，$\overline{BC}$ 是 $\overline{DE}$ 的中垂線，於是 $\overline{CD}=\overline{CE}$ 且 $\overline{BD}=\overline{BE}$，又因 $\overline{BC}=\overline{BC}$，由 SSS 全等得知 $\Delta CDB\cong\Delta CEB$。

● 證明： $\Delta CDB\cong\Delta CGH$。

因為 $\overline{CD}=\overline{CG}$，$\overline{BC}=\overline{CH}$，又 $\angle DCB=\angle GCH$（對頂角相等），由 SAS 全等得知 $\Delta CDB\cong\Delta CGH$。

● 證明： B,E,G,H 四點共圓。

因為 $\Delta CDB\cong\Delta CEB\cong\Delta CGH$，所以 $BEGH$ 為等腰梯形，於是 B,E,G,H 四點共圓。

● 證明： A,B,E,G,H 五點共圓。

因為 $\overline{CH}\cdot\overline{CB}=\overline{CB}\cdot\overline{CB}=\overline{CD}\cdot\overline{CA}=\overline{CG}\cdot\overline{CA}$，所以 A,B,G,H 四點共圓，於是 A,B,E,G,H 五點共圓。

● 證明： A,E,C,F 四點共圓。

因為 $\overline{PF}$ 是 $\overline{AB}$ 的中垂線， $\overline{CF}$ 是 $\overline{BH}$ 的中垂線，所以 F 為 A,B,E,G,H 五點的圓心，因此 $\angle AFE=2\angle AGE=\angle ACE$（第一個等式是圓心角與圓周角的關係，第二個等式是等腰三角形與外角的關係），故 A,E,C,F 四點共圓。

柒、口試試題及參考解答

口 試 題

1、設n為正整數，計算$\sum_{j=0}^{n} 2^{n-j} C_j^{n+j}$ 。

2、擲一顆公正的六面體骰子，設擲n次點數總和是 5 的倍數之機率為$p(n)$。已知$p(n) = a + b \times p(n-5)$，求實數$a, b$之值。

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

口試題【參考解答】

1. 【參考解答】

令$s_n = \sum_{j=0}^{n} 2^{n-j} C_j^{n+j}$，則

$$s_n = 2\sum_{j=0}^{n} 2^{n-j-1}\left[C_j^{n+j-1} + C_{j-1}^{n+j-1}\right]$$

$$= 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-j-1} C_j^{n+j-1} + C_n^{2n-1} + \sum_{j=0}^{n} 2^{n-j} C_{j-1}^{n+j-1}$$

$$= 2s_{n-1} + C_n^{2n-1} + \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} C_{j-1}^{n+j-1}$$

$$= 2s_{n-1} + C_n^{2n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-j-1} C_j^{n+j}$$

$$= 2s_{n-1} + \frac{1}{2}\left(C_n^{2n-1} + C_{n-1}^{2n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-j} C_j^{n+j}\right)$$

$$= 2s_{n-1} + \frac{1}{2}\left(C_n^{2n} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-j} C_j^{n+j}\right)$$

$$= 2s_{n-1} + \frac{1}{2}s_n \text{。}$$

因此，$s_n = 4s_{n-1}$。又$s_1 = 4$，所求為$s_n = 4^n$。

2. 【參考解答】

擲n次，點數總和是$5k+i$的機率設為$p_i(n)$，用第一次擲的點數來分，

若第一次擲 1，則後$n-1$次要擲$5k+(i-1)$，才能湊出$5k+i$；

若第一次擲 2，則後$n-1$次要擲$5k+(i-2)$，才能湊出$5k+i$；

若第一次擲 3，則後$n-1$次要擲$5k+(i-3)$，才能湊出$5k+i$；

若第一次擲 4，則後$n-1$次要擲$5k+(i-4)$，才能湊出$5k+i$；

若第一次擲 5，則後$n-1$次要擲$5k+(i-5)$，才能湊出$5k+i$；

若第一次擲 6，則後$n-1$次要擲$5k+(i-6)$，才能湊出$5k+i$；

而上面的$5k+(i-1)$到$5k+(i-6)$中，除以5餘$(i-1)$的會多一次，其餘的都各一次，所以$p_i(n)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}p_{i-1}(n-1)$。

所以$p(n)=p_5(n)=\frac{1}{6}+\frac{p_4(n-1)}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{p_3(n-2)}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}\left(\frac{1}{6}+\frac{p_2(n-3)}{6}\right)\parallel 1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^3}\left(\frac{1}{6}+\frac{p_1(n-4)}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{6^4}\left(\frac{1}{6}+\frac{p_0(n-5)}{6}\right)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{6^5}+\frac{p(n-5)}{6^5}=\frac{1/6(1-1/6^5)}{1-1/6}+\frac{p(n-5)}{6^5}$。

所以$a=\frac{1-1/6^5}{5}$，$b=\frac{1}{6^5}$。

114 學年度高級中學數學能力競賽決賽

口試程序表

考生順序	編號	口試預備	口試 A
		21210 教室	21216 教室
1	11450	08:40	09:10-09:30
4	11404	09:00	09:30-09:50
7	11414	09:20	09:50-10:10
休息			
10	11449	10:00	10:30-10:50
13	11417	10:20	10:50-11:10
16	11445	10:40	11:10-11:30
19	11453	11:00	11:30-11:50
午休			
22	11427	13:00	13:30-13:50

考生順序	編號	口試預備	口試 B
		21210 教室	21310 教室
2	11419	08:40	09:10-09:30
5	11401	09:00	09:30-09:50
8	11411	09:20	09:50-10:10
休息			
11	11430	10:00	10:30-10:50
14	11441	10:20	10:50-11:10
17	11431	10:40	11:10-11:30
20	11434	11:00	11:30-11:50
午休			

考生順序	編號	口試預備	口試 C
		21210 教室	21402 教室
3	11443	08:40	09:10-09:30
6	11410	09:00	09:30-09:50
9	11422	09:20	09:50-10:10
休息			
12	11452	10:00	10:30-10:50
15	11435	10:20	10:50-11:10
18	11442	10:40	11:10-11:30
21	11415	11:00	11:30-11:50
午休			
23	11439	13:00	13:30-13:50

備註：口試流程

捌、獨立研究試題及參考解答

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

1. 時間分配：1.5 小時(8:30~10:00)。
2. 配分：每題皆為 7 分。
3. 不可使用計算機。

1、設a, b, c, d均為正整數，$c < d$，且滿足$a = b + c + d$，以及 $ab = cd$。若b可使得(a, c, d)的解共有 782 組，求ab的最小值。

2、證明：從閉區間 $[0, 44]$ 裡任取 2025 個相異實數$a_1, \cdots, a_{2025}$，必存在兩數a_i, a_j滿足$(i + j + 43)|a_i - a_j| < 45$。

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究（一）【參考解答】

1. 【參考解答】

將$a=b+c+d$代入$ab=cd$，可得$b^2=cd-bc-bd$，即$2b^2=(c-b)(d-b)$。

令$A=c-b, B=d-b$，則$2b^2=AB$，$c=b+A, d=b+B, a=3b+A+B$，因此若欲有 782 組解，則$2b^2$的因數個數為$2\times 782=4\cdot 17\cdot 23$。設$b=2^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$為其質因數分解，則$(2n_1+2)(2n_2+1)(2n_3+1)\cdots(2n_k+1)=4\cdot 17\cdot 23$。

由於$ab=3b^2+(A+B)b$，為b的 2 次式，且$A+B\geq 2\sqrt{2}b$，，因此取$A=b, B=2b$，此時$A+B=3b$為最小，而$ab=6b^2$為最小。

Case 1. $2n_1+2=4, 2n_2+1=23, 2n_3+1=17$, 此時$b=2\cdot 3^{11}\cdot 5^8$為最小。

Case 2. $2n_1+2=4, 2n_2+1=391$，此時$b=2\cdot 3^{391}$為最小。

Case 3. $2n_1+2=68, 2n_2+1=23$，此時$b=2^{32}\cdot 3^{11}$為最小。

Case 4. $2n_1+2=92, 2n_2+1=17$，此時$b=2^{45}\cdot 3^8$為最小。

Case 5. $2n_1+2=1564$，此時$b=2^{1564}$為最小。

比較這幾個數的大小，例如：$2^{32}\cdot 3^{11}>2^1\cdot 3^{11}\cdot 8^8>2\cdot 3^{11}\cdot 5^8$，可得$b=2\cdot 3^{11}\cdot 5^8$為最小，而$ab=6b^2=2^3\cdot 3^{23}\cdot 5^{16}$為最小。

2. 【參考解答】

若不然，假設這2025個相異實數$a_1,\cdots a_{2025}$恆滿足

$(i+j+43)|a_1-a_j|\geq 45,\forall i,j$滿足$1\leq i<j\leq 2025.$

我們將證明$max\{a_1,\cdots,a_{2025}\}-min\{a_1,\cdots,a_{2025}\}>44$，這與它們在閉區間[0,44]裡矛盾。

證明如下：令$a_{n_1},a_{n_2},\ldots,a_{n_{2025}}$為$a_1,\cdots a_{2025}$的重排，使其為嚴格遞增數列，即$a_{n_1}<a_{n_2}<\cdots<a_{n_{2025}}$，由條件可得

$a_{n_{2025}}-a_{n_1}=\sum_{k=0}^{2023}\left(a_{n_{2025-k}}-a_{n_{2024-k}}\right)\geq\sum_{k=0}^{2023}\frac{45}{n_{2025-k}+n_{2024-k}+43}$。

由柯西不等式，我們又得到

$$\sum_{k=0}^{2023}(n_{2025-k}+n_{2024-k}+43)\sum_{k=0}^{2023}\frac{1}{n_{2025-k}+n_{2024-k}+43}>2024^2.$$

（顯然等號不可能成立。）再來，我們直接估計

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2023}(n_{2025-k}+n_{2024-k}+43)\\&=2(n_{2025}+\cdots+n_1)-n_1-n_{2025}+43\times 2024\\&\leq 2025\times 2026-3+43\times 2024=2024(2026+43)+2023\\&=2024(2026+43+1)-1=2024\times 2070-1.\end{aligned}$$

可得到$\max\{a_1,\cdots,a_{2025}\}-\min\{a_1,\cdots,a_{2025}\}=a_{n_{2025}}-a_{n_1}>\frac{45\times 2024^2}{2024\times 2070-1}>\frac{45\times 2024}{2070}=44$ ，矛盾。

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

1. 時間分配：1.5 小時(10:20~11:50)。
2. 配分：每題皆為 7 分。
3. 不可使用計算機。

1、 已知 $f(x)$是一個領導係數為 1 的四次實係數多項式，

b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 是五個相異整數。證明：必存在一個 b_i，使得

$|f(b_i)| \geq \frac{3}{2}$。

2、給定圓上五個點依序為A, B, C, D, E，使得直線BE與直線CD平行。令直線AC與直線BE的交點為F，直線AD與直線BE的交點為G。令點F在直線AB的垂足為P，點G在直線AE的垂足為Q，直線FQ與直線GP的交點為R。證明：

(1) 三角形AGP與三角形AFQ面積相等。

(2) 直線AR與直線PQ垂直。

114 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

獨立研究（二）【參考解答】

1. 【參考解答】

已知$\mathrm{f}(x)=\sum_{i=1}^{5} f(b_i)\frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{5}(x-b_j)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{5}(b_i-b_j)}$ ，

(反證法)假設 $|f(b_i)|<\frac{3}{2}$, $\forall i=1,2,3,4,5.$

比較首項係數得 $1=\sum_{i=1}^{5} f(b_i)\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{5}(b_i-b_j)}$.

因此 $1=\left|\sum_{i=1}^{5} f(b_i)\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{5}(b_i-b_j)}\right|$

$$<\frac{3}{2}\left|\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{5}(b_i-b_j)}\right|$$

$$\leq\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{5}|b_i-b_j|}$$

$$\leq\frac{3}{2}\left(2\cdot\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+2\cdot\frac{1}{1\cdot1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot1\cdot2\cdot2}\right)=1$$

矛盾。

2. 【參考解答】

1. 因為BE平行CD，所以弧BC與弧DE相等且$\angle BAC=\angle EAD$，因此直角三角形AFP與直角三角形AGQ相似，

$$\frac{AF}{AG}=\frac{FP}{GQ}=\frac{AP}{AQ}$$

2. 因為$\angle GAQ=\angle FAP$可得$\angle GAP=\angle FAQ$且$AG\cdot AP=AF\cdot AQ$，所以三角形AGP與三角形AFQ面積相等，即

$$AP\cdot GP\cdot\sin\angle AGP=AQ\cdot QF\cdot\sin\angle AQF$$

3. 令點A在直線QP的垂足為H，則$\angle PAH=90°-\angle APH=$

$\angle FPQ$，同理$\angle QAH = \angle GQP$。

4. 對於三角形APQ的三條射線AH、PG、QF，利用 3. 可得

$$\frac{\sin\angle PAH}{\sin\angle HAQ}\cdot\frac{\sin\angle QPG}{\sin\angle GPA}\cdot\frac{\sin\angle AQF}{\sin\angle FQP}$$

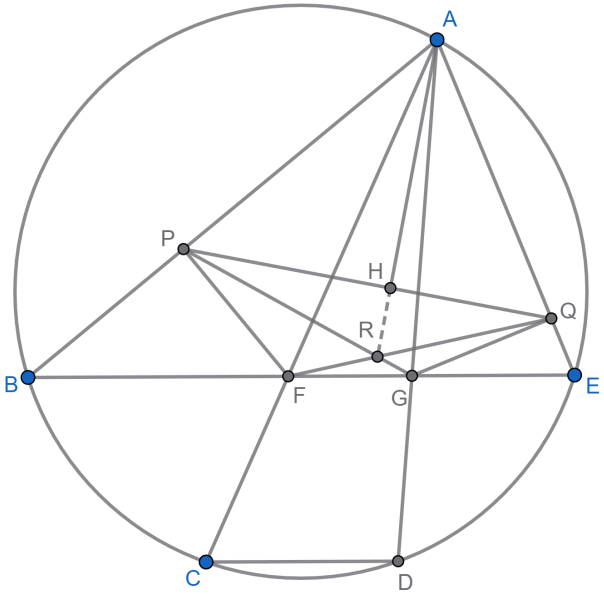
$$=\frac{\sin\angle FPQ}{\sin\angle GQP}\cdot\frac{\sin\angle QPG}{\sin\angle GPA}\cdot\frac{\sin\angle AQF}{\sin\angle FQP}$$

對於三角形FPQ與三角形GPQ，利用正弦定理與 2. 繼續可得

$$=\frac{\sin\angle FPQ}{\sin\angle FQP}\cdot\frac{\sin\angle QPG}{\sin\angle GQP}\cdot\frac{\sin\angle AQF}{\sin\angle PGA}=\frac{FQ}{FP}\cdot\frac{GQ}{GP}\cdot\frac{AP\cdot GP}{AQ\cdot FQ}=\frac{AP\cdot GQ}{AQ\cdot FP}$$

$$=1$$

根據正弦西瓦定理逆定理，AH、GP、FQ三線共點於R。因為AH與直線PQ垂直且AHR共線，所以AR與PQ垂直。



玖、114 學年度各分區複賽試題及參考解答

114 學年度北一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：平面上，有一定圓 O 及圓外一定點 A，且 P 為圓上一動點。今以 $\overline{AP}$ 為邊作一正三角形 APB（按順時針順序），試證：這些 B 點共圓。

(10 分)

問題二：設 $f(x)=\log\left(1+5^x+\frac{(25)^x}{2}\right)-\log 3$。

試證：對任何實數 x，不等式 $2f(x)<f(2x)$ 恆成立。

(12 分)

《背面尚有試題》

問題三： 已知直線$5x+12y+a=0$ $a>0$ 與圓$x^2+y^2=1$相切，令$\triangle ABC$的邊長分別為$5, 12, a$且其內切圓為Γ， 為Γ上的動點，求$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$的最大值與最小值。

(12 分)

問題四： 設$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(a-x)^2+25}$，其中$a>0$， 為實數。試問：當 為何值時，$f(x)$有最小值，且最小值為何（以符號$a$表示）？

(12 分)

《試題結束》

114 學年度北一區 (花蓮高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 正四面體的頂點和各邊中點共有 10 個點，在這 10 個點中任取 4 個不共面的點，共有____(一)____種取法。

2. 在空間中，若 $ABCD$ 為邊長 2 的正方形，　、Q 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{AD}$ 的中點，$\overline{RC}$ 垂直正方形 $ABCD$ 所在的平面，且 $\overline{RC}=1$，則　點到平面 PQR 的距離為____(二)____。

3. 當一個正整數，從最左邊第二位開始，每個數字都比其左邊的數字大，且最左邊數字與最右邊數字的差為 2 的倍數，稱此數為「同升數」，例如 36789 是一個五位同升數，3659 不是一個四位同升數。

   所有四位同升數共有____(三)____個。

4. 若數列 a_n 為公差 $d\neq 0$ 的等差數列，且 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_m}$ 為等比數列，其中 $k_1=1$，$k_2=4$，$k_3=13$，則 $k_1+k_2+...+k_m=$____(四)____（以符號 m 表示）。

《背面尚有試題》

5. 若 $a>0$，且不等式 $\left|1-\frac{ax+a^2}{\sqrt{x}}\right|\le 1$ 在 $\frac{1}{4}\le x\le 1$ 時恆成立，則 a 的取值範圍為 _____(五)_____。

6. 求方程式 $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{6x-16}+7x-19=0$ 的解 $x=$ _____(六)_____。

7. 在△ABC 中，D、E、F 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上，且 $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=4\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AF}$。若 G 為△DEF 的重心，且 $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對 $(\alpha,\beta)=$ _____(七)_____。

8. 若實數 a 滿足 $\left(7\cdot\sqrt[3]{20}-a\right)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$，則 $a=$ _____(八)_____。

《試題結束》

114 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試－試題&解答

問題一：平面上，有一圓 O 及圓外一點 A，且 P 為圓上一點。今以 $\overline{AP}$ 為邊作一正三角形 APB（按順時針順序），試證：這些 B 點共圓。

(10 分)

【解】

不失一般性假設 O 為單位圓，若 A 的座標為 (a,o)

（設 $\overline{OA}$ 為 x 軸即可）則 P 的參數式為 $(\cos t,\ \sin t)$　$0\le t<2\pi$，

B 點為 P 以 A 為中心順時針轉 60° 而來。

設 B 座標為 (p,q)，有

$$\begin{bmatrix} p-a \\ q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t-a \\ \sin t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos t-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \\ \frac{-\sqrt{3}}{2}(\cos t-a)+\frac{1}{2}\sin t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} p=\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{a}{2} \\ q=\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}\Rightarrow\left(p-\frac{a}{2}\right)^2+\left(q-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=1$$

因此，所有的 B 位於以 $\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{a}\right)$ 為圓心，半徑為 1 的圓上。

問題二： 設 $f(x)=\log\left(1+5^x+\dfrac{(25)^x}{2}\right)-\log 3$。

試證：對任何實數 x，不等式 $2f(x)<f(2x)$ 恆成立。

(12 分)

【解】

因為 $\begin{cases} f(2x)=\log\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)-\log 3, \\ 2f(x)=2\log\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)-2\log 3=\log\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2-2\log 3, \end{cases}$

所以 $f(x)-2f(x)=\left[\log\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)-\log 3\right]-\left[\log\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2-2\log 3\right]$

$=\log\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)-\log\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2+\log 3=\log\left[\dfrac{3\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)}{\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2}\right]>\log\dfrac{\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)}{\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2}$ $\left(\text{因 } 3>\dfrac{5}{2}\right)$

由柯西不等式知 $\left[(1)^2+\left(5^x\right)^2+\left(\dfrac{5^{2x}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\left[(1)^2+(1)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\geq\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2$

移項整理得 $\dfrac{\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)}{\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2}\geq 1$，

推得 $f(x)-2f(x)>\log\dfrac{\left(1+5^{2x}+\dfrac{5^{4x}}{2}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)}{\left(1+5^x+\dfrac{5^{2x}}{2}\right)^2}\geq\log 1=0$，

故 $f(2x)>2f(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}$。

問題三： 已知直線 $5x+12y+a=0$ $a>0$ 與圓 $x^2+y^2=1$ 相切，令 $\triangle ABC$ 的邊長分別為 $5, 12, a$ 且其內切圓為 Γ，P 為 Γ 上的動點，求 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 的最大值與最小值。

(12 分)

【解】

$L:5x+12y+a=0$ 和 $x^2+y^2=1$ 相切 $\Leftrightarrow L$ 和 $0,0$ 的距離為 1。

由點到直線的距離公式可得 $\dfrac{|5\cdot 0+12\cdot 0+a|}{\sqrt{5^2+12^2}}=1$，即 $|a|=13$。又 $a>0$，

因此 $a=13\Rightarrow \triangle ABC$ 為直角三角形（滿足 $5^2+12^2=13^2$）。

建立座標如下：

設 $A(0,0), B(12,0), C(0,5)$，內切圓半徑為 γ，$\dfrac{5\gamma}{2}+\dfrac{12\gamma}{2}+\dfrac{13\gamma}{2}=\dfrac{5\times 12}{2}\Rightarrow \gamma=2$。

故 P 點在圓 $(x-2)^2+(y-2)^2=2^2$ 上移動，設 $P(x,y)=(2+2\cos\theta, 2+2\sin\theta)$

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\left[(x-0)^2+(y-0)^2\right]+\left[(x-12)^2+(y-0)^2\right]+\left[(x-0)^2+(y-5)^2\right]$$

$$=\left(x^2+x^2+x^2-24x+144\right)+\left(y^2+y^2+y^2-10y+25\right)$$
$$=\left(3x^2-24x+144\right)+\left(3y^2-10y+25\right)$$
$$=3(2+2\cos\theta)^2-24(2+2\cos\theta)+3(2+2\sin\theta)^2-10(2+2\sin\theta)+169$$
$$=3\left(4+8\cos\theta+4\cos^2\theta\right)-24(2+2\cos\theta)+3\left(4+8\sin\theta+4\sin^2\theta\right)-10(2+2\sin\theta)+169$$
$$=-24\cos\theta+4\sin\theta+12\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+125$$
$$=-24\cos\theta+4\sin\theta+137$$

因 $-\sqrt{(-24)^2+(4)^2}\le -24\cos\theta+4\sin\theta\le\sqrt{(-24)^2+(4)^2}$

$\therefore -4\sqrt{37}\le -24\cos\theta+4\sin\theta\le 4\sqrt{37}$

$137-4\sqrt{37}\le -24\cos\theta+4\sin\theta+137\le 137+4\sqrt{37}$

$137-4\sqrt{37}\le \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\le 137+4\sqrt{37}$

最大值 $137+4\sqrt{37}$，最小值 $137-4\sqrt{37}$。

問題四：設 $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(a-x)^2+25}$，其中 $a>0$，x 為實數。試問：

當 x 為何值時，$f(x)$ 有最小值，且最小值為何（以符號 a 表示）？

(12 分)

【解】

$\sqrt{x^2+4}:(x,0)$到$(0,2)$的距離

$\sqrt{(a-x)^2+25}:(x,0)$到$(a,5)$的距離

建立座標如下：

設 $P(x,0),A(0,2),B(a,5),B'(a,-5)$

$\overline{PB}=\overline{PB'}$，將 $f(x)$ 轉換成求 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}$ 的值，

設 $\overline{AB'}$ 交 x 軸於 T 點，$\triangle PAB$ 中兩邊和大於第三邊，可得 $\overline{PA}+\overline{PB'}>\overline{AB'}$，

故當 P 點恰和 T 點重合時，$f(x)$ 有最小值 $\overline{AB'}$

$\Rightarrow f(x)=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB}=\sqrt{(a-0)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{a^2+49}$

此時 P 點的座標滿足 AB' 斜率= AP 斜率，$\frac{7}{-a}=\frac{2}{-x}\Rightarrow x=\frac{2}{7}a\Rightarrow P\left(\frac{2}{7}a,0\right)$。

綜上所述，當 $x=\frac{2}{7}a$ 時，$f(x)$ 有最小值 $\sqrt{a^2+49}$。

114 學年度第一區 (花蓮高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試二答案卷）

編號：_____號（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
141	$\frac{\sqrt{11}}{11}$	66	$\frac{3^{m+1}-3}{4}-\frac{m}{2}$
(五)	**(六)**	**(七)**	**(八)**
$0 < a \leq \frac{-1+\sqrt{65}}{8}$	$\frac{19}{7}$	$\left(\frac{5}{12}, \frac{3}{20}\right)$	19

總分：_____分

114 學年度台北市(萬芳高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____(學生自填)

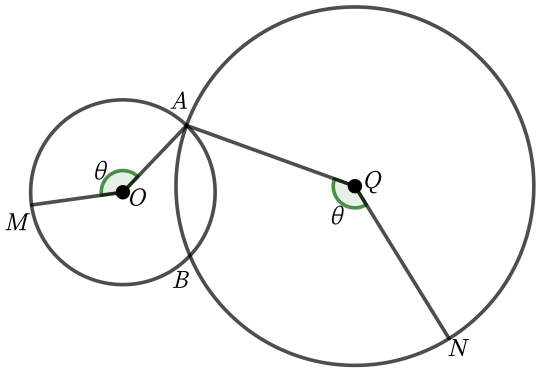
注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知一平面上圓心為 O 的圓和圓心為 Q 的圓相交於點 A 和點 B。設點 A 分別對點 O 和點 Q 逆時針旋轉 θ 角度，得 M,N 兩點。試證：對任意旋轉角 θ，

(1) M,B,N 三點共線。(5 分)

(2) 存在一固定點 P，使得 $\overline{PM}=\overline{PN}$。(8 分)



問題二： 已知 a,b 是滿足 $a^2+b^2=1$ 的正實數。試求 $\dfrac{a^3+b^3+1}{(a+b+1)^3}$ 的範圍。 (12 分)

問題三： 設 a,b,c 是正整數，且滿足 $b+c>a>b>c$。若 $5^a,5^b,5^c$ 除以 6^4 的餘數都相同，試求 $a+b+c$ 的最小值。 (12 分)

問題四： 設 $n\geq 2$ 為正整數，且黑板上有 $2^1,2^2,\ldots,2^n$ 等 n 個數。某甲每回合選取黑板上的兩個數，將它們擦掉後，再寫上兩數之差（大減小）；如此重複進行下去，直到黑板上剩下一個數為止。試求黑板上最後剩下的數之所有可能值。 (12 分)

< 試題結束 >

114 學年度台北市(萬芳高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案卷內。

問題一： 在 $\triangle ABC$ 中，設 a,b,c 分別為 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，且 $\angle A > \angle B$。若 $\tan A, \tan B$ 為方程式 $x^2-5x+6=0$ 的兩根，且 $c=\sqrt{10}$，則 $\triangle ABC$ 最長邊的長度為____(一)____。

問題二： 兩人輪流擲骰子，每次擲兩顆骰子，首先擲出點數和大於 6 的人獲勝，否則，就換另一個人擲。在此條件下，先擲的人獲勝機率為____(二)____。

問題三： 將 $\dfrac{1-\sqrt{3}\tan 10^\circ}{\sqrt{1-\cos 20^\circ}}$ 化為最簡根式為____(三)____。

<背面尚有試題>

問題四： 有 15 個人圍成一圈。從這 15 人中選出 5 人，其中任兩人皆不相鄰的方法有____**（四）**____種。

問題五： 坐標空間中，A,B 兩點在某直線 L 上的投影點分別為 C,D。已知 $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{3}$，且兩直線方程式分別為 $AC:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1$ 與 $BD:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-1}$，則 $\overline{AB}$ 的長度為____**（五）**____。

問題六： 在 $x+3y=1$ 的條件下，若 $\sqrt{x^2+y^2}+x$ 的最小值為 m_1，$\sqrt{x^2+y^2}+y$ 的最小值為 m_2，則 m_1+m_2 之值為____**（六）**____。

問題七： 平面上，若四邊形 $ABCD$ 滿足 $\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DC}=12$，且有最大面積，則 $\overline{AC}$ 的長為____**（七）**____。

< 試題結束 >

114 學年度台北市(萬芳高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

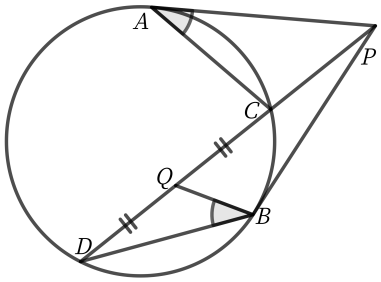
編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題一： 已知一矩形長寬分別為 m,n，其中 m,n 為正整數。將此矩形分割成若干個正方形，請問這些正方形的邊長和，最小是多少？(15 分)

問題二： 如圖，P 為圓外一點，過 P 作圓的兩條切線，與一條割線，A,B 為切點，割線交圓於 C,D 兩點，其中 C 在 P,D 之間。若 Q 為 $\overline{CD}$ 中點，試證 $\angle PAC = \angle DBQ$。(15 分)



< 試題結束 >

114 學年度台北市(萬芳高中)

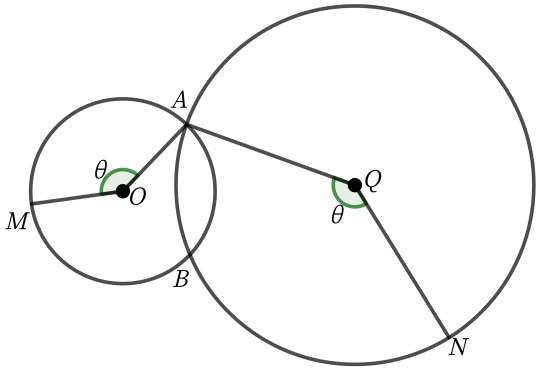
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 參考答案

問題一： 已知一平面上圓心為 O 的圓和圓心為 Q 的圓相交於點 A 和點 B。設點 A 分別對點 O 和點 Q 逆時針旋轉 θ 角度，得 M,N 兩點。試證：對任意旋轉角 θ，

(1) M,B,N 三點共線。(5 分)

(2) 存在一固定點 P，使得 $\overline{PM}=\overline{PN}$。(8 分)

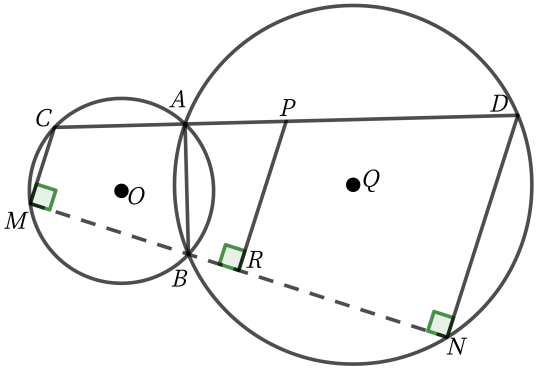


【參考解答】 (1) 因為

$$\angle ABM=\frac{1}{2}\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AQN=\frac{1}{2}(2\pi-2\angle ABN)=\pi-\angle ABN$$

所以不管 θ 多少，M,B,N 皆共線。

(2) 過 A 點作 AB 的垂線，分別交圓 O 和圓 Q 於點 C 和點 D。
此時 BC、BD 分別為圓 O、圓 Q 的直徑。
所以 $\angle BMC=\angle BND=\pi/2$，於是 MC 平行 ND。
令點 P 為線段 CD 中點。
過 P 作 MN 垂線垂足 R，則 PR 為線段 MN 的中垂線，故 $\overline{PM}=\overline{PN}$。



問題二： 已知 a,b 是滿足 $a^2+b^2=1$ 的正實數。試求 $\dfrac{a^3+b^3+1}{(a+b+1)^3}$ 的範圍。 (12 分)

【參考解答】 設 $x=a+b$，由柯西 $(a^2+b^2)(1^2+1^2)\geq(a+b)^2$，

所以 $x\in(1,\sqrt{2}]$。且 $ab=\frac{x^2-1}{2}$。

因此 $\dfrac{a^3+b^3+1}{(a+b+1)^3}=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+1}{(a+b+1)^3}=\dfrac{x(1-\frac{x^2-1}{2})+1}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{2-x}{2(x+1)}=\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{1}{2}$。

所以可能的值落在 $\left[\dfrac{3}{2(\sqrt{2}+1)}-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2(1+1)}-\dfrac{1}{2}\right)=\left[\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2},\dfrac{1}{4}\right)$。

問題三： 設 a,b,c 是正整數，且滿足 $b+c>a>b>c$。若 $5^a,5^b,5^c$ 除以 6^4 的餘數都相同，試求 $a+b+c$ 的最小值。 (12 分)

【參考解答】 根據題意知 $5^a\equiv 5^b\equiv 5^c \pmod{6^4}$。

這等價於 $5^a\equiv 5^b\equiv 5^c \pmod{2^4}$ 且 $5^a\equiv 5^b\equiv 5^c \pmod{3^4}$。

因此 $5^{a-c}\equiv 5^{b-c}\equiv 1 \pmod{2^4}$ 且 $5^{a-c}\equiv 5^{b-c}\equiv 1 \pmod{3^4}$。

(1) 先求滿足 $a^n\equiv 1 \pmod{2^4}$ 的最小正整數 n。
使用 $\phi(2^4)=8$，所以 $5^8\equiv 1 \pmod{2^4}$。並驗證 $5^1,5^2 \bmod 2^4$ 不等於 1，
而 $5^4\equiv 1 \pmod{2^4}$，所以 4 次是最小。

(2) 再求滿足 $a^n\equiv 1 \pmod{3^4}$ 的最小正整數 n。
一樣利用 $\phi(3^4)=54$，所以 $5^{54}\equiv 1 \pmod{3^4}$。
並驗證 $5^3,5^6,5^9,5^{18},5^{27} \bmod 3^4$ 皆不同餘 1，所以 54 次是最小。

又 $\text{lcm}(4,54)=108$，所以 $a\equiv b\equiv c \pmod{108}$，於是 a,b,c 都差至少 108 的倍數。

令 $a=108w+c$ 與 $b=108v+c$，
又 $b+c>a$，推得 $108v+2c>108w+c$，所以 $108(w-v)<c$。

取 $v=1$, $w=2$, $c=109$ 時 $a+b+c$ 有最小值 $325+217+109=651$。

問題四： 設 $n \geq 2$ 為正整數，且黑板上有 $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$ 等 n 個數。某甲每回合選取黑板上的兩個數，將它們擦掉後，再寫上兩數之差（大減小）；如此重複進行下去，直到黑板上剩下一個數為止。試求黑板上最後剩下的數之所有可能值。 (12 分)

【參考解答】 答案：所有 2 到 $2^n - 2$ 中，除以 4 餘 2 的數字皆有可能。

首先注意到，黑板上的數字，一開始除了 2 之外皆為 4 的倍數。而選兩數相減，若選到的皆為 4 的倍數，相減後，還是 4 的倍數；若一個是 4 的倍數，另一個是 4 的倍數加 2，相減完，則是 4 的倍數加 2。所以黑板上一直維持恰有一個偶數是 4 的倍數加 2，其餘皆為 4 的倍數，所以最後剩下的數字必定除以 4 餘 2。

以下論證：所有 2 到 $2^n - 2$ 中除以 4 餘 2 的數字都可能出現。

對 n 使用數學歸納法：

初始狀況 $n = 2$：黑板上一開始只有 2,4，兩數相減得到 2，成立。

設命題在正整數 $2, 3, \ldots, n-1$ 時成立，以下討論 n 的狀況。設 k 為小於 2^n 且除以 4 餘 2 的正偶數。此時存在唯一的正整數 m 滿足 $2^m - 1 < k < 2^m$，其中正整數 m 小於或等於 n。此時先將 $2^n - 2^{n-1}$ 得到 2^{n-1}，再將 $2^{n-1} - 2^{n-2}$ 得到 2^{n-2}，依此類推，直到黑板上剩下 $2, 2^2, \ldots, 2^m$ 這 m 個數字為止。

若 $m < n$，則由數學歸納法假設可知最後可以得到 k。

若 $m = n$，則由數學歸納法的假設在 $n-1$ 時成立，亦即從 $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ 開始可以得到 $2^n - k$ 這個數 (注意到：由 $2^{n-1} < k < 2^n$ 可知 $0 < 2^n - k < 2^{n-1}$)。最後用 2^n 減去 $2^n - k$ 得到 k。

綜上所述，命題對所有 $n \geq 2$ 的正整數皆成立。證畢。

114 學年度台北市(萬芳高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)參考答案

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
$3\sqrt{2}$	$\frac{12}{17}$	$2\sqrt{2}$	378
(五)	**(六)**	**(七)**	
$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{5}$	$6\sqrt{2}$	

114 學年度台北市(萬芳高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試參考答案

問題一： 已知一矩形長寬分別為 m,n，其中 m,n 為正整數。將此矩形分割成若干個正方形，請問這些正方形的邊長和，最小是多少？(15 分)

【參考解答】 設符號 (m,n) 為 m,n 的最大公因數。

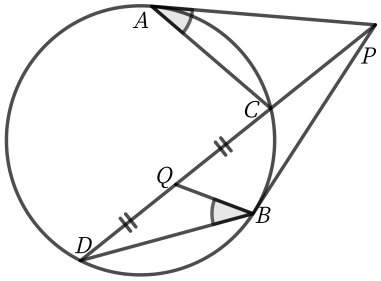
若 $m=n$，則這個最小值，就是都不用切。即為 $m=m+n-(m,n)$。

當 $m>n$ 時，若所切的最大正方形邊長為 n，則將此正方形扣除 (有可能扣中間)，剩下 $(m-n)\times n$ 大小的矩形，依數學歸納法，最小邊長和為 $(m-n)+n-(m-n,n)$。又因為 $(m-n,n)=(m,n)$，所以總和為 $n+(m-n)+n-(m-n,n)=m+n-(m,n)$。

若所切的最大正方形邊長小於 n，利用平行短邊 (邊長 n 的) 直線掃過整個長方形，隨時都會經過至少兩個正方形以上，所以這些正方形邊長和至少為 $2m>m+n>m+n-(m,n)$，所以不會是最小值。

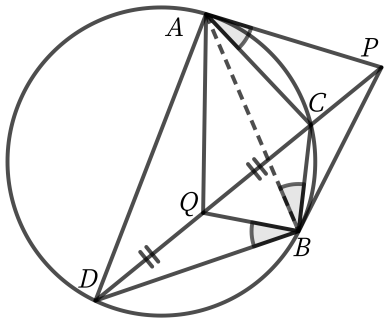
綜合以上，每次都切最大的正方形，就像是輾轉相除法一樣，最後留下最小的正方形為 $(m,n)\times(m,n)$，此時所有正方形邊長和恰為 $m+n-(m,n)$。

問題二： 如圖，P 為圓外一點，過 P 作圓的兩條切線，與一條割線，A,B 為切點，割線交圓於 C,D 兩點，其中 C 在 P,D 之間。若 Q 為 $\overline{CD}$ 中點，試證 $\angle PAC=\angle DBQ$。(15 分)



【參考解答】 因為 $\angle PAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\angle PDA$，$\angle PCA=\angle DAP$，

所以 $\triangle PAC\sim\triangle PDA$。推得 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}}$。



同理 $\triangle PBC\sim\triangle PDB$。推得 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PD}}$。

又 $\overline{PA}=\overline{PB}$，所以 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$，也就是 $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$。

由托勒密定理 $\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}$，

還有 Q 為 $\overline{CD}$ 中點，得 $2\overline{AD}\cdot\overline{BC}=2\overline{AB}\cdot\overline{CQ}$。於是 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AD}}$。

再加上 $\angle BCQ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\angle BAD$，推得 $\triangle CBQ\sim\triangle ABD$($SAS$ 相似)。

所以 $\angle CBQ=\angle ABD$，同時減去 $\angle ABQ$，得 $\angle DBQ=\angle CBA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\angle PAC$。

114 學年度新北市 (新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：在三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=5, \overline{BC}=6$。設外心為 O，外接圓為 Γ，垂心為 H。過 H 作與 $\overline{BC}$ 平行的直線，與外接圓 Γ 交於 P,Q 兩點。

(1) 計算外接圓半徑。 (4 分)

(2) 計算 $\overline{AH}$ 的長度。 (4 分)

(3) 計算 $\overline{PQ}$ 的長度。 (8 分)

〈背面尚有試題〉

問題二：(1) 黑板上寫著 4 個正整數。這 4 個正整數有一個有趣的性質：任選一個黑板上的正整數 a ， 若將它任意寫成兩個正整數的和 $a=b+c$ (b,c 可以相等)，則 b 或 c 至少有一個出現在黑板上的這 4 個數之中。請問黑板上這 4 個數的總和，最大可以是多少? 此時這 4 個數各是多少? (4 分)

(2)黑板上寫著 100 個正整數。 這 100 個正整數有一個有趣的性質：任選一個黑板上的正整數 a ， 若將它任意寫成兩個正整數的和 $a=b+c$ (b,c 可以相等)，則 b 或 c 至少有一個出現在黑板上的這 100 個數之中。證明黑板上這 100 個數的和至多為 10,000。 (12 分)

問題三：由數個連續一位數碼所組成的平方數，稱為「連平方數」。例如：324 是由 {2,3,4} 這三個連續一位數碼所組成的連平方數，而 576 也是連平方數。試求出比 576 大的兩個最小連平方數。 (17 分)

〈試題結束〉

114 學年度新北市 (新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 所有滿足 $2x^2+y^2=2x-2xy+115$ 之正整數對 (x,y) 為 ＿＿(一)＿＿。

2. $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$ 的展開式中， x^4 的係數為＿＿(二)＿＿。

3. 已知 a,b,c 為質數，且滿足 $a^2+b^2+c^2+abc=445$。則 $a^3+b^3+c^3=$ ＿＿(三)＿＿。

〈背面尚有試題〉

4. 已知 A, B, C, D 是以 O 為球心的球面上四點，而且空間中直線 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ 兩兩互相垂直，且線段長 $\overline{AB}=8, \overline{AC}=9, \overline{AD}=12$，則此球的半徑為_____(四)____。

5. 令 x 和 y 為兩個實數。 已知

$$[\sqrt{2} \quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{19}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

若 $x^2+y^2\neq 0$ ，則 $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 之值為____(五)____。

6. 數字卡片 1,2,3,4,5，每張都各有紅、黃、綠三張，共 15 張。從其中抽出 5 張，每個數字都出現，且每個顏色也都出現的方法數有____(六)____種。

7. 設 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$，其中 a, b, c 均為實數。已知 $P(x)=0$ 的所有根在複數平面的單位圓內或圓上，則 $2a^2-c^2-4b$ 的最大值為___(七)___。

〈試題結束〉

114 學年度新北市 (新店高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）參考答案

問題一：在三角形 ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=5,\overline{BC}=6$。設外心為 O，外接圓為 Γ，垂心為 H。過 H 作與 $\overline{BC}$ 平行的直線，與外接圓 Γ 交於 P,Q 兩點。

(1) 計算外接圓半徑。(4 分)

(2) 計算 $\overline{AH}$ 的長度。(4 分)

(3) 計算 $\overline{PQ}$ 的長度。(8 分)

【解】(1)令 $\mathrm{a}=\mathrm{BC}=6,\mathrm{b}=\mathrm{CA}=5,\mathrm{c}=\mathrm{AB}=5$。半周長 $\mathrm{s}=8$。

由海龍公式得到 ABC 面積 $=12$。

外接圓半徑$R=\mathrm{abc}/4\Delta\mathrm{ABC}=25/8$

(2)由餘弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+25-36}{2\cdot5\cdot5}=\frac{7}{25}$

因此 $AH=2R\cos A=\frac{7}{4}$.

(3)過 A 於 BC 的高為 h_a 滿足 $2\Delta\mathrm{ABC}=ah_a$，因此 $h_a=4$

又 $$\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{BC})=\mathrm{R}\cos\mathrm{A}=7/8$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{H},\mathrm{BC})=\mathrm{h_a}-\mathrm{AH}=4-7/4=9/4$$

由於 PQ 平行 BC，故圓心到弦 PQ 的距離為 $9/4-7/8=11/8$

因此，弦長 $PQ=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{(25/8)^2-(11/8)^2}=$

$$2\sqrt{(625-121)/64}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$$

問題二：(1) 黑板上寫著 4 個正整數。這 4 個正整數有一個有趣的性質：任選一個黑板上的正整數 a ， 若將它任意寫成兩個正整數的和 $a = b + c$ (b, c 可以相等)，則 b 或 c 至少有一個出現在黑板上的這 4 個數之中。請問黑板上這 4 個數的總和，最大可以是多少? 此時這 4 個數各是多少? (4 分)

(2)黑板上寫著 100 個正整數。 這 100 個正整數有一個有趣的性質：任選一個黑板上的正整數 a ， 若將它任意寫成兩個正整數的和 $a = b + c$ (b, c 可以相等)，則 b 或 c 至少有一個出現在黑板上的這 100 個數之中。證明黑板上這 100 個數的和至多為 10,000。 (12 分)

【解】(1) 1+3+5+7=16. 硬討論.

(2) 把問題數學語言寫成如下: 設 S 為含有 100 個整數的集合，滿足下列性質: 若正整數 x, y (兩者可能相等) 使得 $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in \mathrm{S}$，那麼 x 或 y 至少有一個屬於 S，證明 S 中的元素總和至多 10,000。

設 a_i 為這 100 個整數中第 i 小的數。我們聲稱 $a_i \leq 2i - 1$

根據題目的條件，集合 S 中包含 a_i，且對於每一對數

$$(1, a_i - 1), (2, a_i - 2), \ldots, \left(\left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{a_i}{2} \right\rceil \right)$$

至少包含其中一個元素。

因此，集合 S 中小於或等於 a_i 的元素至少有 $1 + \left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor$ 個。

由於 a_i 是 S 中第 i 小的元素，因此必有 $1 + \left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor \leq i$

從而得到 $a_i \leq 2i - 1$

因此，$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leq 1 + 3 + \cdots + 199 = 10000$

這正是所要證明的結果。

問題三：由數個連續一位數碼所組成的平方數，稱為「連平方數」。例如：324 是由 {2,3,4} 這三個連續一位數碼所組成的連平方數，而 576 也是連平方數。試求出比 576 大的兩個最小連平方數。 (17 分)

【解】 因為$(9k+i)^2 \equiv i^2 (\mathrm{mod}\ 9)$。當 $i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ 時，$i^2 \equiv 0,1,4,0,7,7,0,4,1 (\mathrm{mod}\ 9)$。因此平方數除以 9 的餘數只會是 0, 1, 4, 7。

因為 $0+1+2 \equiv 3$, $1+2+3 \equiv 6$, $\underline{2+3+4 \equiv 0}$, $3+4+5 \equiv 3$, $4+5+6 \equiv 6$, $\underline{5+6+7 \equiv 0}$, $6+7+8 \equiv 3$, $7+8+9 \equiv 6$。所以三位數要是連續個位平方數，只會有{2,3,4}與 {5,6,7}這兩種組合。

(i)$\lceil\sqrt{234}\rceil = 16$ 到 $\lfloor\sqrt{432}\rfloor = 20$，又 $2+3+4 \equiv 0$，所以只要測 16 到 20 中 3 的倍數 18 即可，得 324。

(ii)$\lceil\sqrt{567}\rceil = 24$ 到 $\lfloor\sqrt{765}\rfloor = 27$，又 $5+6+7 \equiv 0$，所以只要測 24 到 27 中 3 的倍數 24,27 即可，得 576。

因此接下來要往四位數著手。同樣先測 9 的倍數，只有 $1+2+3+4 \equiv 1\,(\text{合}), 3+4+5+6 \equiv 0\,(\text{合}), 4+5+6+7 \equiv 4\,(\text{合})$ 其餘不合。

(i) 利用 $1+2+3+4 \equiv 1$，$\lceil\sqrt{1234}\rceil = 36$ 到 $\lfloor\sqrt{4321}\rfloor = 65$ 的數中(形如 $9k \pm 1$)的平方都不是{1234}的排列。

(ii) 利用 $3+4+5+6 \equiv 0$，$\lceil\sqrt{3456}\rceil = 59$ 到$\lfloor\sqrt{6543}\rfloor = 80$ 的數中(形如 3k)的平方，只有$66^2 = 4356$ 符合。

(iii)利用$4+5+6+7 \equiv 4$，$[4567] = 68$ 到 $\lfloor\sqrt{7654}\rfloor = 87$的數中(形如 $9k \pm 2$)的平方，只有$74^2 = 5476$符合

114 學年度新北市 (新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）參考答案

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

答　案　欄

（ 一 ）	（ 二 ）	（ 三 ）	（ 四 ）
(5,5)	45	6875	$\frac{17}{2}$

（ 五 ）	（ 六 ）	（ 七 ）
$-\frac{1}{3}$	150	8

總分：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

114 學年度第二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 $(x+1)^s\cdot(x-3)^t=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中 s,t 是正整數。

(1) 若 $a_1=a_2$，試證：$3n$ 是完全平方數。(8 分)

(2) 試證：存在無窮多組正整數對 (s,t) 使得 $a_1=a_2$。(8 分)

問題二： 由 0 和 1 排成的數列稱為**二元數列**。試問：

(1) 有多少種 12 項的二元數列，滿足數列中出現連續項 0,1 至少一次，且出現連續項 1,0 也至少一次？(6 分)

(2) 有多少種 12 項的二元數列，滿足數列中出現連續項 0,1 至少兩次？(10 分)

問題三： 設銳角三角形 ABC 的垂心為 H，並令三角形 BHC 的外接圓為 Γ。

(1) 設直線 AB 與 AC 分別再交圓 Γ 於點 P,Q。試證：H 為三角形 APQ 的外心。(7 分)

(2) 分別在點 P 與點 Q 作三角形 APQ 之外接圓的切線，設此兩條切線交於點 K。試證：直線 AK 平分線段 $\overline{BC}$。(10 分)

＜試題結束＞

114 學年度第二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）參考答案

問題一： 設 $(x+1)^s\cdot(x-3)^t=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中 s,t 是正整數。

(1) 若 $a_1=a_2$，試證：$3n$ 是完全平方數。(8 分)

(2) 試證：存在無窮多組正整數對 (s,t) 使得 $a_1=a_2$。(8 分)

【解】

(1) 由次數得 $n=s+t$。因為

$$\begin{aligned}(x+1)^s(x-3)^t&=\left(x^s+sx^{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}x^{s-2}+\cdots\right)\left(x^t-3tx^{t-1}+\frac{9t(t-1)}{2}x^{t-2}+\cdots\right)\\&=x^n+(s-3t)x^{n-1}+\left(\frac{s(s-1)}{2}+\frac{9t(t-1)}{2}-3st\right)x^{n-2}+\cdots,\end{aligned}$$

所以 $a_1=s-3t,\ a_2=\dfrac{s(s-1)}{2}+\dfrac{9t(t-1)}{2}-3st$。

若 $a_1=a_2$，就有 $2(s-3t)=s(s-1)+9t(t-1)-6st$，即 $2(s-3t)=(s-3t)^2-s-9t$，得到 $3n=3(s+t)=(s-3t)^2$ 為完全平方數。

(2) 因為 $a_1=a_2$ 與 $3(s+t)=(s-3t)^2$ 是充要條件，故只需說明 $s^2-(6t+3)s+9t^2-3t=0$ 有無窮多組正整數解即可。計算（以 s 為未知數的）判別式

$$\Delta=(6t+3)^2-4(9t^2-3t)=48t+9$$

必須為完全平方數，且滿足 $s=\dfrac{6t+3+\sqrt{\Delta}}{2}$ 是正整數，可以取 $48t+9=9(8k+1)^2$，k 為任意正整數，則有無窮多組

$$(s,t)=(36k^2+21k+3,12k^2+3k)$$

使得 $a_1=a_2$，得證。 □

問題二： 由0和1排成的數列稱為**二元數列**。試問：

(1) 有多少種12項的二元數列，滿足數列中出現連續項0,1至少一次，且出現連續項1,0也至少一次？(6分)

(2) 有多少種12項的二元數列，滿足數列中出現連續項0,1至少兩次？(10分)

【解】 考慮一般n項的二元數列。先計算在排法中不會出現連續0,1的排法。此排法一旦出現0，其後面都會是0，故有以下$n+1$種排法：對$k=0,1,2,\ldots,n$，恰有k個0和$n-k$個1的排法僅有一種：

$$\overbrace{1,1,\ldots,1}^{n-k},\overbrace{0,0,\ldots,0}^{k}.$$

(1) 設A表示出現連續0,1至少一次的n項二元數列所成的集合，而B表示出現連續1,0至少一次的n項二元數列所成的集合。由取捨原理，可知

$$\begin{aligned}|A\cup B| &= 2^n-|(A\cap B)^C| = 2^n-|A^C\cup B^C| = 2^n-(|A^C|+|B^C|-|(A^C\cap B^C)|\\ &= 2^n-((n+1)+(n+1)-2) = 2^n-2n.\end{aligned}$$

所求是$n=12$的情形，答案為$2^{12}-2\cdot 12=4072$。

(2) 設數列中出現連續項0,1恰好一次的n項二元數列有a_n種，其中首項為0的有b_n種；則首項為1的有a_n-b_n種。又首項為1且出現連續項0,1恰好一次的n項二元數列有a_{n-1}種，可得$a_n-b_n=a_{n-1}$，即$b_n=a_n-a_{n-1}$。

另一方面，計算b_n可分成兩類：

(i) 第1項及第2項均為0，且出現0,1恰好一次的n項二元數列有b_{n-1}種。

(ii) 第1項為0但第2項為1，且出現0,1恰好一次的n項二元數列有$n-1$種。

因此，$b_n=b_{n-1}+n-1$。由此可得

$$b_n=b_1+\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})=0+\sum_{k=2}^{n}(k-1)=\frac{n(n-1)}{2}=C_2^n.$$

進一步可推得：

$$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=0+\sum_{k=2}^{n}b_k=\sum_{k=2}^{n}C_2^k=C_3^{n+1}.$$

因此，所求出現連續項0,1至少兩次的n項二元數列共有$2^n-(n+1)-C_3^{n+1}$種。當$n=12$時，答案為3797種。

□

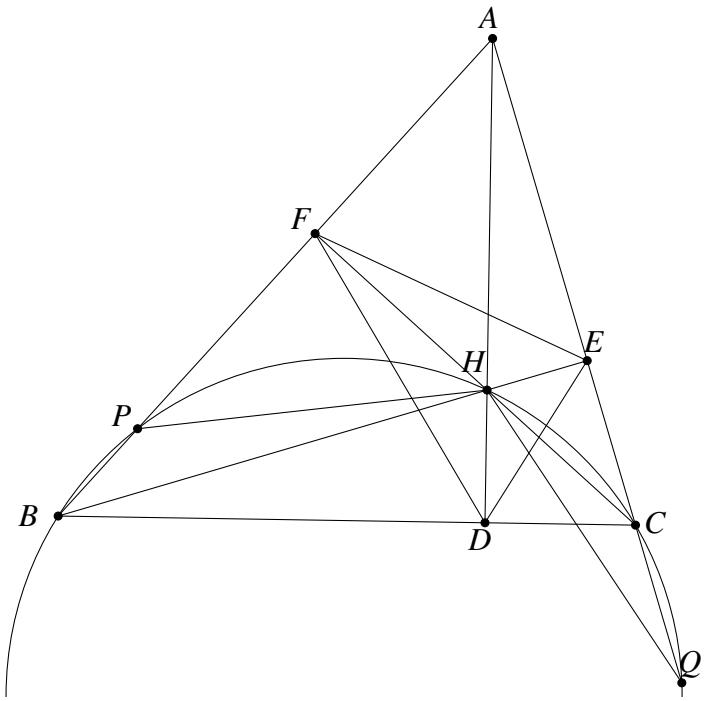
問題三： 設銳角三角形 ABC 的垂心為 H，並令三角形 BHC 的外接圓為 Γ。

(1) 設直線 AB 與 AC 分別再交圓 Γ 於點 P, Q。試證：H 為三角形 APQ 的外心。(7 分)

(2) 分別在點 P 與點 Q 作三角形 APQ 之外接圓的切線，設此兩條切線交於點 K。試證：直線 AK 平分線段 $\overline{BC}$。(10 分)

【解】

(1) 設 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 為三角形 ABC 的三高，共點於 H。欲證 H 為三角形 APQ 的外心，即證明 $\overline{AH}=\overline{PH}=\overline{QH}$。



我們有下列的角度關係：

$$\angle HAP = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCH = 180^\circ - \angle HPB = \angle HPA.$$

故 $\triangle HPA$ 為等腰三角形，兩底角相等可得 $\overline{AH}=\overline{PH}$。

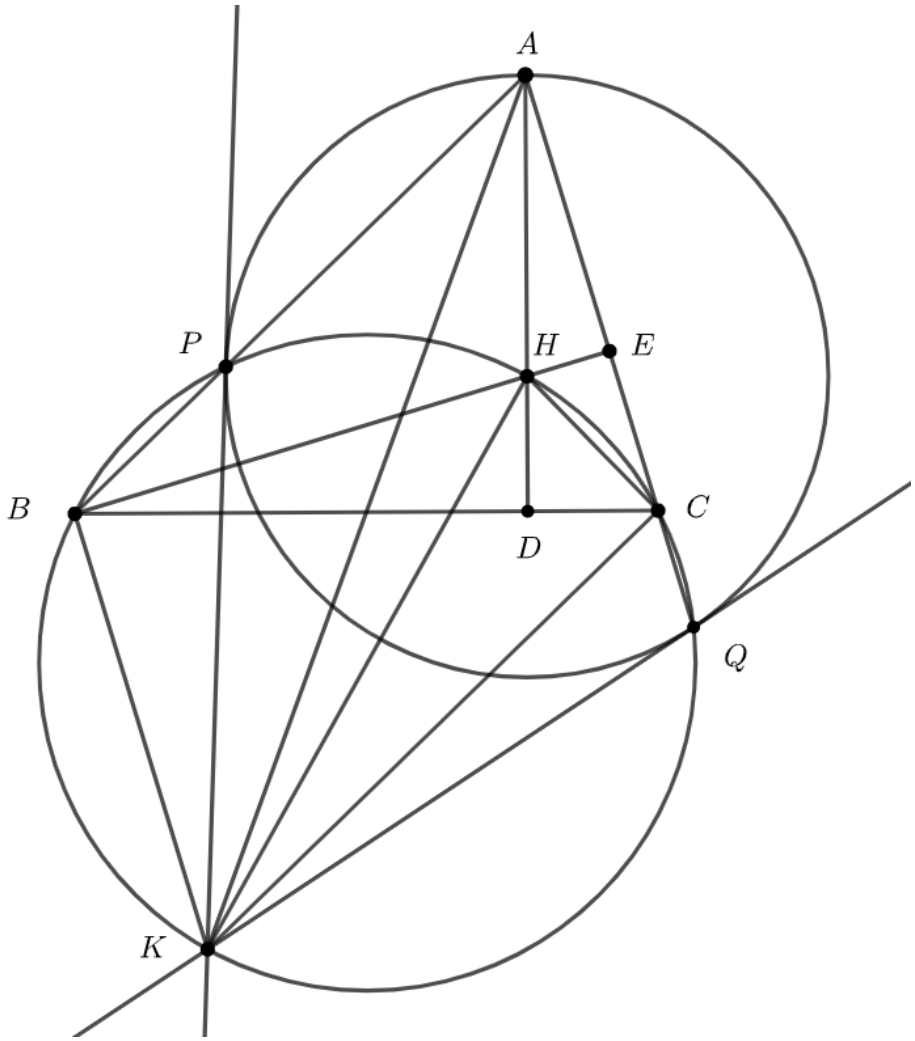
另一邊同樣可證：

$$\angle AQH = \angle CQH = \angle CBH = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAD = \angle QAH,$$

故 $\overline{AH}=\overline{QH}$。本題得證。

註：點 P,Q 剛好一個在三角形的邊上、另一個在邊外。

(2) 由第 (1) 小題，點 H 為三角形 APQ 外接圓的圓心。故 $\angle HPK = \angle HQK = 90^\circ$。
所以 K 點也在圓 Γ 上，且 $\overline{HK}$ 是這個圓的直徑。
我們來證明 $ABKC$ 為平行四邊形，於是兩對角線互相平分。



計算下列角度：由於 $\angle CBK = 90^\circ - \angle HBC = \angle ECB$，故 $BK \parallel AC$。
並且 $\angle BCK = 90^\circ - \angle HCB = \angle ABC$，故 $CK \parallel AB$。
另解：

$$\begin{aligned}
\angle BKA &= \angle BKH - \angle AKH = (90^\circ - \angle KHB) - \angle AKH && (\overline{HK} \text{ 為直徑}) \\
&= (90^\circ - \angle KHB) - (\angle DHK - \angle HAK) && (\text{三角形外角}) \\
&= 90^\circ - (\angle KHB + \angle DHK) + \angle HAK \\
&= 90^\circ - \angle DHB + \angle HAK \\
&= 90^\circ - \angle AHE + \angle HAK = \angle EAH + \angle HAK = \angle EAK,
\end{aligned}$$

故 $BK \parallel AC$。 □

114 學年度北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 箱子裡有若干顆球，其中有15顆紅球，其餘為藍球。現從箱子中抽球，每顆球被抽中的機率皆相同。已知隨機自箱子中抽出兩顆球時，兩顆球同色的機率恰為 $\frac{1}{2}$，則箱子裡一開始最多有＿＿（一）＿＿顆球。

2. 設 n 為正整數。若不存在正整數 k 滿足 $\frac{8}{13} < \frac{k}{n} < \frac{5}{8}$，則 n 的最大可能值為＿＿（二）＿＿。

3. 設 $\langle a_n \rangle$ 為實數數列，滿足 $a_0 = 0, a_1 = 1$，且對任意非負整數 n，都有

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n + 1.$$

則 $a_n =$ ＿＿（三）＿＿ (以 n 的函數表示之)。

4. 設 m 為實數。若方程式 $|x^2 - 4x| - 2mx - 1 = 0$ 有四個相異實根，則 m 的範圍為＿＿（四）＿＿。

5. 設 f 是定義在區間 $[-1, 1]$ 的函數，且對所有的 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$，都有

$$f(\cos(2x)) = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}.$$

則 $f\left(\frac{7}{8}\right)$ 之值為＿＿（五）＿＿。

＜背面尚有試題＞

6. 設 n 為正整數。若

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+2k}{3}\right]>2025,$$

則 n 的最小可能值為＿＿（六）＿＿。

註：$[x]$ 表示不超過實數 x 的最大整數。

7. 坐標空間中，已知圓 C 在平面 $4x-3z=0$ 上，且 C 的圓心為 $(0,1,0)$，半徑為 5。設在圓 C 上與平面 $2x+2y+z=32$ 最接近的點為 P，且 P 到坐標原點的距離為 $\sqrt{m+\sqrt{n}}$，其中 m,n 均為整數，則數對 $(m,n)=$＿＿（七）＿＿。

＜試題結束＞

114 學年度北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）參考答案卷

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算結果依序填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)
36	104	$\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n$	$-\frac{1}{8}<m<1$
(五)	**(六)**	**(七)**	
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	78	$(26,50)$	

114 學年度北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，滿分為 30 分，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【問題一】 設實係數二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 有兩實根 α,β，且滿足 $-2\leqslant\alpha\leqslant-1$ 及 $0\leqslant\beta\leqslant1$。試求 $a+b$ 的範圍。 (15 分)

【問題二】 設等腰梯形 T 的四邊長依序為 $5, 9, 5, 16$。已知橢圓 Γ 與 T 的四邊均相切，且 Γ 的兩個短軸頂點分別在 T 的兩底上。試求 Γ 的長軸長。

（15 分）

＜試題結束＞

114 學年度北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試參考答案

問題一： 設實係數二次方程式$x^2+ax+b=0$有兩實根α,β，且滿足$-2\leqslant\alpha\leqslant-1$及$0\leqslant\beta\leqslant1$。試求$a+b$的範圍。 (15 分)

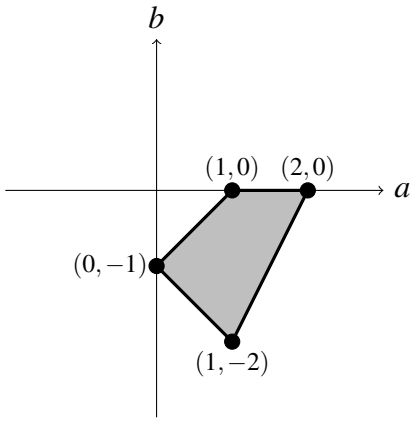
【解】 考慮二次函數$f(x)=x^2+ax+b$，其圖形開口朝上。若兩根α,β滿足$\alpha\in[-2,-1],\beta\in[0,1]$，則有

$$f(-2)\geqslant0,\quad f(-1)\leqslant0;\quad f(0)\leqslant0,\quad f(1)\geqslant0.$$

將這四個不等式轉成a,b滿足的不等式，可得

$$\begin{cases}4-2a+b\geqslant0,\\1-a+b\leqslant0,\\b\leqslant0,\\1+a+b\geqslant0.\end{cases}$$

以下是ab-平面上的可行解區域：



求$a+b$的最大範圍為線性規劃問題，用平行線法可得$-1\leqslant a+b\leqslant2$。 □

問題二： 設等腰梯形 T 的四邊長依序為 5, 9, 5, 16。已知橢圓 Γ 與 T 的四邊均相切，且 Γ 的兩個短軸頂點分別在 T 的兩底上。試求 Γ 的長軸長。

（15 分）

【解】 答：12.

將圖形沿著 T 的高的方向伸縮，得到等腰梯形 T' 與其內切圓 Γ'。此時 T' 的兩底長之和等於兩腰長之和（因為四邊形有內切圓），故 T' 的兩腰長均為 $\frac{9+16}{2}=\frac{25}{2}$。此 Γ 的長軸長等於 Γ' 的直徑，也就是 T' 的高，計算為

$$\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{16-9}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25^2-7^2}=\frac{24}{2}=12.$$

□

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求最小實數 k，使得對所有 $x>0, y>0$, 皆有 (9 分)

$$x^{1/3}+y^{1/3}\le k\left(x+y\right)^{1/3}.$$

二、若對於所有實數 x 和 y，皆滿足 (10 分)

$f\left(x^2-y^3\right)=f\left(x^{49}+y^3\right)-f\left(x^8\right)$，找出所有可能的函數 $f\left(x\right)$.

三、設 $a.b.c$ 是三個兩兩相異的實數，證明 (10 分)

$$\left(\frac{a}{a-b}+5\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+5\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+5\right)^2\ge 61.$$

四、試求滿足下列方程式之實數 x. (10 分)

$$\log_2\left\{\frac{\prod_{k=0}^{10}\left[\left(x+20k+10\right)^4+2500\right]}{\prod_{k=0}^{10}\left[\left(x+20k\right)^4+2500\right]}+11\right\}=10.$$

五、求方程式 $5\left(xy+yz+zx\right)=6xyz$ 的所有正整數解。 (10 分)

114學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求滿足 $xy^2\left(x+y^2\right)=2^{25}$ 的所有正整數解。

二、令 x 和 n 為正整數，若 x^n+2^n+1 整除 $x^{n+1}+2^{n+1}+1$，求 (x,n).

三、設 n 為正整數，令 $S(n)$ 表示將 $1,3,\cdots,2n+1$ 等連續 $n+1$ 個奇數中任兩數的乘積相加的總和，例如 $S(1)=1\cdot3=3, S(2)=1\cdot3+1\cdot5+3\cdot5=23$，求 $S(15)$.

四、已知 $\overline{AB}$ 是平面上長度等於 1 的線段，點 C 是 $\overline{AB}$ 線段上的一個動點且 $C\neq A,B$，令 D 是平面上滿足 $\overline{DB}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{DB}=\overline{AC}$ 的點，連結 $\overline{AD}$ 線段且令 E 是 $\overline{AD}$ 線段上滿足 $\overline{CE}\perp\overline{AD}$ 的點，求 $\overline{BE}$ 的最小值。

五、設函數 $f(x)=\dfrac{\sin 9x}{\sin x}+\dfrac{\cos 9x}{\cos x}$，若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且滿足 $f(x)=-\dfrac{5}{2}$，求 $\cos 2x$.

六、設 (x_0,y_0,z_0) 同時在兩個平面 $x+2y+z=4$ 及 $2x+y+3z=9$ 上，
求 $\left|x_0-1\right|+\left|y_0-2\right|+\left|z_0-3\right|$ 的最小值。

七、令 $d(n)$ 為整除 n 的最大奇數，例如 $d(1)=d(2)=d(4)=1, d(6)=3$, 設 $S(n)=\sum_{i=1}^{n}d(i)$，求 $S(2^{100})$.

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）解答

一、【解】

令 $x=a^3, y=b^3 (a>0, b>0)$

$\Rightarrow a+b \le k(a^3+b^3)^{1/3}$

當 $a=b$, 得 $2a \le k(2a^3)^{1/3} \Rightarrow 4^{1/3} \le k$

證明 $4^{1/3}=k$

$a+b \le 4^{1/3}(a^3+b^3) \Leftrightarrow (a+b)^3 \le 4(a^3+b^3)$

$\Leftrightarrow a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \le 4(a^3+b^3)$

$\Leftrightarrow 0 \le a^3-a^2b+b^3-ab^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (a-b)(a^2-b^2)$

$\Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2(a+b)$

$\Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$

$\therefore k=4^{1/3}$

二、【解】

對於任意實數 x，帶入實數 y 使得等式 $x^2-y^3=x^{49}+y^{49}+y^3$ 成立，因此得到 $f(x^8)=0$，代表對於所有 $x \ge 0$，皆有 $f(x)=0.$

對於任意實數 x，代入 $y=0$，得到

$0=f(x^2-0^3)=f(x^{49}+0^3)-f(x^8)=f(x^{49})$

因此對於所有 x，皆有 $f(x)=0.$

故此等式之唯一解為零函數 $f(x)=0.$

三、【解】

令 $x=\dfrac{a}{a-b}, y=\dfrac{b}{b-c}, z=\dfrac{c}{c-a}$

則 $x-1=\dfrac{b}{a-b}, y-1=\dfrac{c}{b-c}, z-1=\dfrac{a}{c-a}$

由 $(x-1)(y-1)(z-1)=xyz$

得 $xy+yz+zx=x+y+z-1$

$$(x+5)^2+(y+5)^2+(z+5)^2$$

$$=x^2+y^2+z^2+10(x+y+z)75$$

原式 $=(x+y+z)^2-2(x+y+z-1)+10(x+y+z)+75$

$$=(x+y+z)^2+8(x+y+z)+77$$

$$=\big((x+y+z)+4\big)^2+61\geq 61$$

四、【解】

先證明 $\big[x+(i+1)10\big]^2-10\big[x+(i+1)10\big]+50$

$$=\big[x+i\cdot 10\big]^2+10\big[x+i\cdot 10\big]+50$$

$$\big[x+(i+1)10\big]^2-10\big[x+(i+1)10\big]+50$$

$$=x^2+20(i+1)x+(i+1)^2 10^2-10x-10^2(i+1)+50$$

$$=x^2+20ix+10x-10^2(i+1)i+50$$

$$=x^2+20ix+10^2 i^2+10^2+10x+50$$

$$=(x+10i)^2 10\big[x+10i\big]+50$$

即得

$$\frac{\prod_{k=0}^{10}\Big[\big(x+20k+10\big)^4+2500\Big]}{\prod_{k=0}^{10}\Big[\big(x+20k\big)^4+2500\Big]}=1013$$

$$\Rightarrow\frac{\prod_{k=0}^{10}\Big[\big(x+20k+10\big)^4+2500(x+20k+10)^2+50-2\cdot 50(x+20k+10)^2\Big]}{\prod_{k=0}^{10}\Big[\big(x+20k\big)^4+2\cdot 50(x+20k)^2+50^2-2\cdot 50(x+20k)^2\Big]}=1013$$

$$\Rightarrow\frac{\prod_{k=0}^{10}\Big[\big(x+20k+10\big)^2+50\big]^2)-\big[10(x+20k+10)\big]^2\Big]}{\prod_{k=0}^{10}\Big[\Big[\big(x+20k\big)^2+50\Big]^2\Big]-\big[10(x+20k+10)\big]^2}=1013$$

五、【解】

原方程式可變為$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{6}{5}$

設$x\geq y\geq z$，則$\frac{3}{8}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

即$\frac{3}{z}\geq\frac{6}{5}$，$\therefore z\leq\frac{15}{6}$

又$\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{6}{5}$，$\therefore z>\frac{5}{6}$

由以上得知$z=1,2$

當$z=1$ 時 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$

現在$\frac{2}{y}\geq+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$，$\therefore y\leq 10$

又$\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$，$\therefore y>5$

由以上得知$y=6,7,8,9,10$

當$y=6,x=30,y=10,x=10$

當$y=7,8,9$時，x均不是整數

當$z=2$ 時 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{10}$

現在$\frac{2}{y}\geq+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{7}{10}$，$\therefore y\leq\frac{20}{7}$

又$\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{7}{10}$，$\therefore y>\frac{7}{10}$

由以上得知$y=1,2,$

當$y=2$時，$x=5$，然而$y=1$，x不是整數

所以$(30,6,1)(10,10,1)$及$(5,2,2)$為方程式的正整數解

由對稱性可得原方程式的正整數解(x,y,z)為

$(30,6,1),(30,1,6),(6,30,1),(6,1,30),(1,30,6),(10,10,13),$
$(10,1,10),(1,10,10),(5,2,2),(2,5,2),(2,2,5).$

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）解答

一、【解】

$xy^2 = 2^k \cdots (1)$

$x + y^2 = 2^i \cdots (2)$

$j + k = n \cdots (3)$

由(1)得 $x = 2^l, y = 2^m (l \geq 0, m \geq 0) \cdots (4)$

由(2)得 $2^l + 2^{2m} = 2^i \cdots (5)$

由(5)得 $l = 2m \cdots (6)$

代入(4)得 $x = 2^{2m}, y = 2^m \cdots (7)$

把(7)代入 $xy^2(x + y^2) = 2^n$

$2^{2m}, 2^{2m}(2^{2m} + 2^{2m}) = 2^n$

得 $\Rightarrow 6m + 1 = n$

$\therefore (x, y, n) = (2^{2p}, 2^p, 6p + 1), p \geq 0$

當 $n = 25$ 時，$(x, y) = (2^8, 2^4)$

二、【解】

答案 11。(x, n) 的所有可能解為 $(4, 1)(11, 1)$

$$n = 1 : x + 3 \left| x^2 + 5 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5}{x + 3} = x - 3 + \frac{14}{x + 3} \in Z \Leftrightarrow x + 3 \right| 14.$$

因此 $x + 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14,$ 這意味著 $x = 4$ 和 $x = 11$ 是正整數解。

$$n \geq 2 : \ -x = 1 : 2^n + 2 \left| 2^{n+1} + 2 \Rightarrow 2^{n-1} + 1 \right| 2^n + 1 \Rightarrow 2^{n-1} + 1 \left| 2(2^{n-1} + 1 \right|) - 1$$

這是不可能的。

$-x \geq 2$:注意到 $x^n + 2^n + 1$ 整除 $x^n + 2^n + 1$ 整除 $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ 當且僅當

$x^n + 2^n + 1$ 整除 $x(x^n + 2^n + 1) - (x^{n+1} + 2^{n+1} + 1) = (x - 2)(2^n + 1) + 1 > 0$

因此，我們必須有 $x^n + 2^n + 1 \leq (x - 2)(2^n + 1) + 1$

對於$x=2$，這變成$x^n+2^n+1\le 1$，矛盾。

對於$x=3$，這變成$3^n+2^n+1\le 2^2+2\Rightarrow 3^n=1\Rightarrow n=0$，不是一個正整數，矛盾。

三、【解】

$$S(n)=\frac{1}{2}\left\{\left[1+3+\cdots+(2n+1)\right]^2-\left[1^2+3^2+\cdots+\left(2n+1\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(n+1)^4-\left[\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(n+1)^4-\frac{2(n+1)(2n+1)(4n+3-2n)}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+5n+1)$$

$$\therefore S(15)=\frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 751$$

$$=30040$$

四、【解】

$$\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\overline{AE}}{x},\overline{AE}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\overline{BE}^2=\overline{AE}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AE}\,\overline{AB}\cos A$$

$$\text{餘弦}=\frac{x^2}{1+x^2}+1-2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=2-\frac{2x+1}{1+x^2},0<x<1$$

令 $f(x)=\frac{2x+1}{1+x2},0<x<1$

$$x=\tan\theta\,2\sin\cos\theta+\cos^2\theta,0<\theta<\frac{\pi}{4}$$

$$=\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}$$

$$\cos=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\max f(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$rnin\overline{BC} = \sqrt{2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

五、【解】

$$f(x) = \frac{\sin 9x}{\sin x} + \frac{\cos 9x}{\cos x}$$

$$= 2\cos 8x + \sin 8x\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= 2\cos 8x + \sin 8x \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= 2\cos 8x + 4\cos 4x \cos 2x \sin 2x \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= 2(2\cos^2 4x - 1) + 4cox4x(\cos 4x + 1)$$

$$= 8\cos^2 4x + 4\cos 4x - 2$$

$$= 8(\cos 4x + \frac{1}{4})^2 - \frac{5}{2}$$

$$f(x) = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos 4x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore \cos 4x = -\frac{1}{4}, \frac{\prod}{2} < 4x < \frac{3}{2}\prod$$

$$\frac{\prod}{4} < 2x < \frac{3\prod}{4}, \cos 2x = \pm\sqrt{\frac{1\cos 4x}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

六、【解】

方程組 $x + 2y + z = 4$

$2x + y + 3z = 9$

之解集合 $x = 3 - 5t$

$y = t$

$z = 1 + 3t$

考慮 $|x-1|+|y-2|+|z-3|$

$=|2-5t|+|t-2|+|3t-2|$ ……(*)

(一)當 $t \le \frac{2}{5}$ 時，則(*)可以表示為

$$2-5t+2-t+2-3t=6-9t \ge 6-\frac{18}{5}=\frac{12}{5}$$

(二)當 $\frac{2}{5} \le t \le \frac{2}{5}$ 時，則(*)可以表示為

$$5t-2+2-t+2-3t=t+2 \ge \frac{2}{5}+2=\frac{12}{5}$$

(三)當 $\frac{2}{5} \le t \le 2$ 時，則(*)可以表示為

$$5t-2+2-t+3t-2=7t-2 \ge \frac{14}{3}-2=\frac{8}{3}$$

(四)當 $t \ge 2$ 時，則(*)可以表示為 $5t-2+t-2+3t-2=9t-6 \ge 12$

因此當 $t=\frac{2}{5}$ 時，(*)有最小值 $\frac{12}{5}$

七、【解】

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2k} d(i) &= \left\{d(1)+d(3)+\cdots+d(2^k-1)\right\} \\
&+\left\{d(2\times 1)+d(2\times 3)+\cdots+d(2\times(2^{k-1}-1))\right\} \\
&+\left\{d(2^2\times 1)+d(2^2\times 3)+\cdots+d(2^2\times(2^{k-2}-1))\right\} \\
&\vdots \\
&+\left\{d(2^{k-2}\times 1)+d(2^{k-2}\times 3)\right\} \\
&+d(2^{k-1})+d(2^k) \\
&=\left\{1+3+\cdots+(2^k-1)\right\} \\
&+\left\{1+3+\cdots+(2^{k-1}-1)\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$+\{1+3\}+1+1$$

$$=\sum_{i=1}^{2k-1}(2i-1)+\sum_{i=1}^{2k-2}(2i-1)+\cdots\sum_{i=1}^{2^0}(2i-1)+1$$

$$=(2^{k-1})^2+(2^{k-2})^2+\cdots+1+1=(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)+1$$

$$=\frac{4^k-1}{3}+1=\frac{4^k+2}{3}$$

$$\therefore s(2^{100})=\frac{4^{100}+2}{3}$$

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

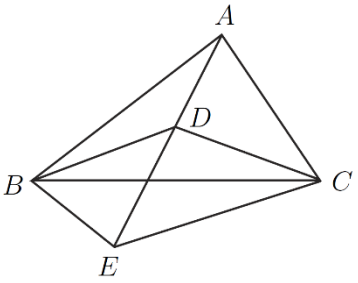
彰雲嘉區複賽試題（一）　　編號：＿＿＿

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、如圖，三角形ΔABC中，點D在ΔABC內部，滿足$\overline{DB}=\overline{DC}$，而$E$在$\overline{AD}$的延長線上且在$\Delta ABC$的外部，並且滿足$\angle BCE=\angle ABD$。
(10分)　試證:$\angle CBE=\angle ACD$。



二、反覆投擲一枚公正的硬幣，直到首次出現序列「正-反-正」為止。試求首次出現序列「正-反-正」所需投擲硬幣的期望次數。
(10分)

三、設A表所有實係數多項式所成的集合，$f:A\to A$為一函數，且對所有$P(x)\in A$及所有的實數b，均有$f(b)=b$，以及
(10分)

$$P(x)f(xP(x)+b)=(xP(x)+b)\big(f(P(x))+bP(x)\big)。$$

已知$P(x)$為10次多項式，其係數均為小於等於10的非負整數，且$f\big(P(x)\big)=4P(x)$，求滿足這些條件的$P(x)$共有幾個?

四、設m,n為正整數。對於每一個n，以a_n表滿足「$m+n$可整除m^2+n」的m的個數，例如a_1表$m+1$可整除m^2+1的m的個數。若已知a_n為奇數，證明n或$n+1$必有一個為完全平方數，並求所有小於等於45的n。
(10分)

五、設n為正整數，從大於等於1且小於等於$2n$的正整數中任取$n+1$個數，證明：此$n+1$個數中，必存在兩個數，其中一個能整除另一個。
(9分)

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

彰雲嘉區複賽試題（二）　　編號：＿＿＿

（時間一小時）

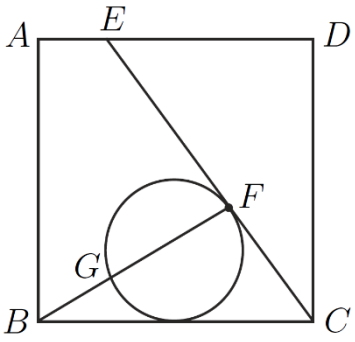
注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 已知 $A(0,0),B(2,0),C(2,3),D(6,3)$ 為坐標平面上四個點，P 為一動點，a 為 $\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 的最大值，b 為 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PD}$ 的最小值。若 $a<b$，求所有 P 點所成的區域面積。

二、 設 $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x+4\sin 2x+3}{\sin x+\cos x}$，$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$。已知當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值 b，求 $a+b$ 的值。

三、 如圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 4，點 E 在 $\overline{AD}$ 上，點 F 在線段 $\overline{CE}$ 上，使得 $\overline{CF}=2$ 以及 $\overline{FE}=3$，作一圓與 $\overline{CE}$ 及 $\overline{CB}$ 相切且 F 是切點，連接 $\overline{BF}$ 使得 $\overline{BF}$ 與圓相交於另一點 G，求 $\overline{FG}$ 的長。



四、 四面體 $A-BCD$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AD}=3,\overline{BC}=\overline{CD}=4,\overline{BD}=5$，滿足此條件的四面體中，當其外接球半徑為最小時，求此時的 $\overline{AC}$ 長。

五、 設 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$，已知 A 為 S 的子集合，且 A 不包含任意兩個相鄰的整數，求滿足此條件的 A 共有幾個。

六、 設 m,c 為實數，已知直線 $y=mx+c$ 可將坐標平面分成兩個恰交於此線的半平面，且使得 $y=2x^2-5x+7$ 與 $y=1-\dfrac{x^2}{4}$ 的圖形分別落在此兩半平面中。若 m 的最小值為 m_1，最大值為 m_2，求 $m_1^2+m_2^2$ 的值。

七、 設 $\mathbb{N}$ 表所有正整數所成的集合，$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 為一函數，滿足 $f(1)=3$，且對所有的正整數 m,n，均有

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn\ 。$$

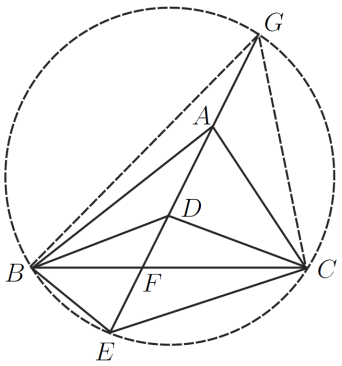
若 $f(n)=2024$，求 n 的值。

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

作通過 B,C,E 的外接圓，而外接圓與 $\overline{AD}$ 的延長線交於 G，且 $G \neq E$。連接 $\overline{BG}$ 與 $\overline{CG}$。



考慮 ΔABD 與 ΔBGD，因為 $\angle ABD = \angle BCE \overset{\text{共圓}}{=} \angle \text{BGD}$，且 $\angle ADB = \angle BDG$，

所以 ΔABD 與 ΔBGD 相似（AA 相似），由此得到 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{GD}}$.

即 $\overline{BD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{GD}$。

因為 $\overline{BD} = \overline{CD}$，將上式替換後得到 $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{GD}$。考慮 ΔACD 與 ΔCGD，因為

$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{GD}$ 得到 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{GD}}$. 又 $\angle ACD = \angle CGD$ 所以 ΔACD 與 ΔCGD 相似（SAS 相似），因此 $\angle ACD = \angle CGD = \angle CGE \overset{\text{共圓}}{=} \angle \text{EBC}$。

二、【解】

定義投擲到當前的狀態有四種: 0、H、HT、HTH，分別代表初始狀態、目前已投擲到 H、目前已投擲到 HT、目前已投擲到 HTH，則 E_0 代表從狀態 0 開始，到出現首次 HTH 的期望投擲數；E_H 代表從狀態 H 開始，到出現首次 HTH 的期望投擲數； E_{HT} 代表從狀態 HT 開始，到出現首次 HTH 的期望投擲數。

- $E_0 = 1 + 0.5E_H + 0.5E_0$（式 1）

  （從狀態 0 投擲一次，有 0.5 的機率投擲到正面而變成狀態 H，也有 0.5 的機率投擲到反面而回到狀態 0）

- $E_H = 1 + 0.5E_H + 0.5E_{HT}$（式 2）

  （從狀態 H 投擲一次，有 0.5 的機率投擲到正面而維持為狀態 H，也有 0.5 的機率投擲到反面而變成狀態 HT）

- $E_{HT} = 1 + 0.5E_{HTH} + 0.5E_0$（式 3）

  （從狀態 HT 投擲一次，有 0.5 的機率投擲到正面而變成狀態 HTH，也有 0.5 的機率投擲到反面而回到狀態 0）

- $E_{HTH}=0$（式 4）

  （因若已經看到狀態 HTH，則不需再投擲）

由式 1、2、3、4 求解可以得到 $E_0=10$，代表從遊戲一開始到看到 HTH 期望要投擲 10 次。

三、【解】

（為方便起見，我們將多項式$P(x)$簡記為P）

當$P=a$為常數多項式時，代入可得$af(ax+b)=(ax+b)(a+ab)$，當$a\neq 0$時，即

$$f(ax+b)=(ax+b)(1+b)。\cdots.(*)$$

若$\deg P\geq 1$，當$b\neq 0$時，多項式P無法整除$xP+b$，所以P必整除$f(P)+bP$，亦即$f(P)=q(x)P$，其中$q(x)$為一個由P來決定的多項式。

令$g(P)=q(x)$，則$f(P)=g(P)P$。

此時可將等式改寫為

$$P(xP+b)g(xP+b)=(xP+b)(g(P)P+bP)$$

對所有的P,b均成立。所以

$$g(xP+b)=g(P)+b,$$

對所有$\deg P\geq 1$的多項式P均成立。注意到(*)式中，當$\deg P=1$時，$g(ax+b)=1+b$，其中$P=ax+b$。

設$P(x)=\sum_{k=0}^{10}a_k x^k$，其中$a_k$均為非負整數，$a_{10}\neq 0$，則

$g(P)=g(x\sum_{k=1}^{10}a_k x^{k-1}+a_0)=g(\sum_{k=1}^{10}a_k\,x^{k-1})+a_0=g(a_{10}x+a_9)+\sum_{k=0}^{8}a_k=1+\sum_{k=0}^{9}a_k$。

所求要滿足$1+\sum_{k=0}^{9}a_k=4$的非負整數解，滿足此條件共有$H_3^{10}=C_3^{12}=220$。$a_{10}=1,2,\ldots,10$，所以$P(x)$共有 2200 種。

四、【解】

$m+n|m^2+n$ 可得 $m+n|n(n+1)$。$n(n+1)$的所有因數中，只要大於n，就對應一個m的解。因此a_n表$n(n+1)$的因數中，大於n的個數。由於$(n,n+1)=1$，所以$n(n+1)$的因數個數為$2a_n$。

已知a_n為奇數，若$n(n+1)=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$為其質因數分解，則

$2a_n=(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$，所以存在某一個$n_j\equiv 1(\bmod 4)$，其餘$n_l$均為偶數。又$(n,n+1)=1$，所以$n=s^2,n+1=p^{4i+1}u^2$或$n=p^{4i+1}u^2,n+1=s^2$，其中$p$為質數，$p,s,u$互質。

利用對稱性，考慮$n=1,4,9,16,25,36$，並計算$(n-1)n$與$n(n+1)$的值，可發現$n=1,3,4,16,36$。

五、【解】

把每個選到的數寫成

$$m=2^k\cdot r,\ \ r\text{ 是奇數.}$$

稱r是m的「奇數部分」。在$1\sim 2n$之間，奇數恰好有n個：$1,3,5,\ldots,2n-1$。

現在從中取了$n+1$個數，依其奇數部分分到這n個「籠子」，依鴿籠原理，必有兩個數的奇數部分相同，設成

$$m_1=2^a r,\ m_2=2^b r\ （r\text{ 奇數}）:$$

不妨令$a\leq b$,則

$$m_2=2^{b-a}m_1,$$

故$m_1\,|\,m_2$。命題得證。

114 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

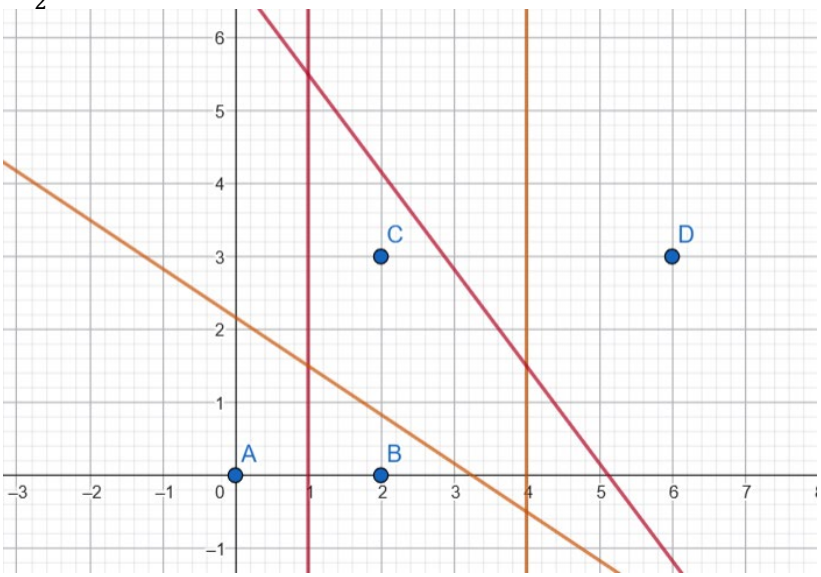
原式即找出同時滿足下面四個式子的 P 點：

$$\overline{PB}<\overline{PA},\overline{PB}<\overline{PD},\overline{PC}<\overline{PA},\overline{PC}<\overline{PD}$$

取 BA、BD 中垂線含 B 的那一個區域，以及 CA、CD 中垂線含 C 的區域之交集(不含邊界)。

$$x>1,4x+3y<20.5,x<4,2x+3y>6.5$$

面積為 $(2+4)\cdot\frac{3}{2}=9$



二、【解】

$f(x)$ 可以改寫為

$$f(x)=\frac{2\sin^2 x+8\sin x\cos x+3(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{5\sin^2 x+8\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{(5\sin x+3\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=5\sin x+3\cos x\quad(\sin x+\cos x>0\ \text{當}\ 0\le x\le\pi/2)$$

$$=\sqrt{34}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\sin x+\frac{3}{\sqrt{34}}\cos x\right)$$

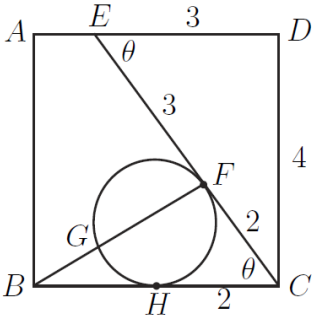
$$=\sqrt{34}\sin(x+\alpha),$$

其中 $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$ 且 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}<\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}.$

因為 $\sqrt{34}\sin(x+\alpha)$ 的圖形是 $\sqrt{34}\sin(x)$ 向左平移 $\alpha(<\pi/6)$ 單位，故最小值發生在 $x=0$，得最小值等於 $f(0)=3$. 所求 $a+b=0+3=3$.

三、【解】

令 $\overline{FB}=x$ 以及 $\overline{FG}=y$，設 $\theta=\angle BCF$，從三角形 ΔBCF 及餘弦定理得知



$$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-x^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{3}{5},$$

其中 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，是由直角三角形 ΔCDE 配合 $\angle CED=\theta$

可得，由此解得 $x^2=\frac{52}{5}$。

記圓與 $\overline{BC}$ 的切點是 H，則

$\overline{CH}=\overline{CF}=2$，$\overline{BH}=4-2=2$，由 $\overline{BH}^2=\overline{BG}\cdot\overline{BF}$，得到

$$2^2=(x-y)x=(\sqrt{\frac{52}{5}}-y)\frac{52}{5}\Rightarrow\sqrt{\frac{52}{5}}-y=\frac{5}{13}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{52}{5}}-\frac{5}{13}=\frac{2}{5}\sqrt{65}-\frac{5}{13},$$

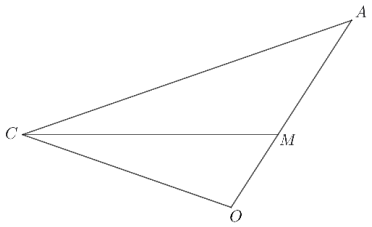
因此 $\overline{FG}=\frac{16}{65}\sqrt{65}$。

四、【解】

當外接球的半徑為最小時，球心恰為三角形ACD的外心。

在三角形ACD中$\sin A=\frac{5\sqrt{11}}{18}$，由正弦定理可得半徑$R=\frac{9}{\sqrt{11}}$。

設$\overline{\mathrm{BD}}$中點為M，O為外接球球心，考慮平面ACM，如右圖，



在三角形AOC中，可求得$\overline{AM}=\frac{\sqrt{11}}{2}$, $\overline{MC}=\frac{\sqrt{39}}{2}$, $\overline{MO}=\frac{7\sqrt{11}}{22}$，

利用餘弦定理可得$\overline{AC}=3\sqrt{2}$。

五、【解】

（方法 1）

子集合中有 k 個互不相鄰的整數之組合數為 C_k^{11-k}，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

因此共有 $\sum_{k=0}^{5}C_k^{11-k}=C_0^{11}+C_1^{10}+C_2^9+C_3^8+C_4^7+C_5^6=144$

其中，假設有依序編號 1~10 的十個位置，子集合中出現的數的位置放球，沒選到的數的位置放隔板。若子集合中有 k 個不相鄰的整數，對應的球將整體區隔成 $k+1$ 個區塊。

又在這些球之間必須有隔板(因為不相鄰)，因此已決定 $k-1$ 個隔板，所以球與隔板已佔據了 $k+(k-1)=2k-1$ 個位置，此時剩下 $10-(2k-1)=11-2k$ 個自由的位置擺放隔板。

現在要將這$(11-2k)$個自由隔板分配到$(k+1)$個區塊中，每個區塊可以放 *0* 個或多個隔板，因此有$C_{(k+1)-1}^{(11-2k)+(k+1)-1}=C_k^{11-k}$種。

（方法 2）

設a_n為集合$S_n=\{1,2,\ldots,n\}$中無相鄰整數的子集合數量，而對元素n

- 若子集合內沒有包含元素n，則無相鄰整數的子集合數量為a_{n-1}
- 若子集合內有包含元素n，則不可出現元素$n-1$，因此無相鄰整數的子集合數量為a_{n-2}。

所以$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$（Fibonacci 數列）

又$a_0=1, a_1=2$，則$a_{10}=144$。

六、【解】

依照分割線的定義，我們可以列出下面的不等式

$$\begin{cases} 2x^2-5x+7-(mx+b)=2x^2-(m+5)x+(7-b)\geq 0 \\ mx+b-\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)=\dfrac{x^2}{4}+mx+(b-1)\geq 0 \end{cases},$$

為了使所有實數x滿足上面兩個不等式，其判別式必須小於等於零。所以得出

$$\begin{cases} (m+5)^2-8(7-b)\leq 0 \\ m^2-(b-1)\leq 0 \end{cases},$$

經過整理可以得到截距b必須滿足下列的不等式

$$m^2+1\leq b\leq 7-\frac{1}{8}(m+5)^2,$$

故m須滿足

$$m^2+1-\left[7-\frac{1}{8}(m+5)^2\right]=\frac{9}{8}m^2-\frac{5}{4}m-\frac{23}{8}\leq 0.$$

注意到m的判別式為

$$\left(-\frac{5}{4}\right)^2+4\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{23}{8}>0$$

所以m_1, m_2即為$\dfrac{9}{8}m^2-\dfrac{5}{4}m-\dfrac{23}{8}=0$的兩相異實根，根據根與係數關係我們列出

$$\begin{cases} m_1+m_2=\dfrac{10}{9} \\ m_1m_2=-\dfrac{23}{9} \end{cases}$$

故所求

$$m_1^2+m_2^2=(m_1+m_2)^2-2m_1m_2=\frac{100}{81}+2\cdot\frac{23}{9}=\frac{514}{81}$$

七、【解】

令 $g(n) := f(n) - n^2$. 則

$g(m+m) = f(m+n) - (m+n)^2 = [f(m) + f(n) + 2mn] - (m^2 + n^2 + 2mn) = g(m) + g(n)$

故 g 在 $\mathbb{N}$ 上可加(additive)。由歸納法可得

$$g(n) = ng(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

因 $g(n+1) = g(n) + g(1)$ 且 $g(1) = f(1) - 1 = 2$. 因此

$$f(n) = n^2 + 2n = n(n+2).$$

解 $f(n) = 2024$:

$$n^2 + 2n = 2024 \Leftrightarrow (n+1)^2 = 2025 = 45^2 \Rightarrow n = 44$$

（另一根 -46 不在 $\mathbb{N}$.）

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（台南區） 筆試（二） 編號：_____

注意事項：

(1) 時間分配：1 小時

(2) 本試卷共 6 題，每題 3 分滿分 18 分。

(3) 不可使用計算機。

(4) 將答案填入答案欄內。

(5) 答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

1. 已知函數 f(x)滿足條件 $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2(x-1)$，$x\neq 0,1$，求函數 f(x)。 1_____

2. 箱子中有黑、紅兩種顏色的球。已知這兩種顏色球的總數介於 15 到 25 之間。假設在箱中取出任意兩顆球的機率相同。現在從箱中拿出兩顆球，已知拿到兩顆黑球的機率比拿到兩顆紅球的機率大 $\frac{1}{9}$，則黑球的顆數為何? 2_____

3. 給定兩個實數a,b以及一個正整數n，已知$a+b=n$，$a^2+b^2=n+114$，則 n 的最大值為何？ 3_____

4. 對任意實數x，$\sqrt{x^2+16}+\frac{3\sqrt{3}-x}{2}$的最小值為何? 4_____

5. 在ΔABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，則$\sin C$最大值為何？ 5_____

6. 求不大於 100，且使$11|(3^n+7^n+4)$成立的所有自然數n的總和。 6_____

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區） 筆試（一） 編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 52 分。每題 13 分。

(3)不可使用計算機。

(4)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(5)答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

一、有 2025 個正整數，每個數的質因數都小於 24，證明其中必存在四個數，它們的幾何平均仍是正整數。

p. s. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的幾何平均是 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$。

二、已知非負實數a, b, c滿足$ab + bc + ca = 1$，求$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$最小值為何？

三、在直線上給定兩點 A 和 B。點 P 在線段 AB 上。證明：當點 P 落在線段 AB 的中點時，$S(P) = \frac{1}{1+\overline{AP}} + \frac{1}{1+\overline{BP}}$會達到最小值。符號 $\overline{\mathrm{AP}}$ 和 $\overline{\mathrm{BP}}$ 表示線段的長。

四、已知函數 f 滿足$f(f(x)) = x, f(xy+1) = f(x)f(y) + 1$。請證明如果$p$是質數，則$f(p)$也是質數。請證明$f\left(\sqrt[2025]{114}\right) = \sqrt[2025]{114}$。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（台南區） 口試（二）

已知 a,b,c 為正實數並且滿足 $a+b+c=1$，求當 a 與 b 為多少時，

$$9^{a}+9^{b}+9^{\frac{c}{2}}$$

達到最小值。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（台南區） 口試（一）

設n是一個正整數，使得存在正整數$x_1, x_2, \ldots, x_n$,滿足

$$x_1 x_2 \ldots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 100n,$$

求n的最大可能值。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（台南區） 筆試（二） 編號：_____

注意事項：

(1) 時間分配：1 小時

(2)

(3) 本試卷共 6 題，每題 3 分滿分 18 分。

(4) 不可使用計算機。

(5) 將答案填入答案欄內。

(6) 答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

1. 已知函數 f(x)滿足條件 $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2(x-1)$，$x\neq 0,1$ ，求函數 f(x)。

2. 箱子中有黑、紅兩種顏色的球。已知這兩種顏色球的總數介於 15 到 25 之間。假設在箱中取出任意兩顆球的機率相同。現在從箱中拿出兩顆球，已知拿到兩顆黑球的機率比拿到兩顆紅球的機率大 $\frac{1}{9}$ ，則黑球的顆數為何?

3. 給定兩個實數a,b以及一個正整數n，已知$a+b=n$，$a^2+b^2=n+114$，則 n 的最大值為何？

4. 對任意實數x， $\sqrt{x^2+16}+\frac{3\sqrt{3}-x}{2}$的最小值為何?

5. 在ΔABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，則$\sin C$最大值為何？

6. 求不大於 100 ，且使$11|(3^n+7^n+4)$成立的所有自然數n的總和。

1 $x+\frac{1}{x(x-1)}$

2____10____

3____16_____

4 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

5 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

6____1480___

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區） 筆試（一）　編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 52 分。每題 13 分。

(3)不可使用計算機。

(4)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(5)答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

一、有 2025 個正整數，每個數的質因數都小於 24，證明其中必存在四個數，它們的幾何平均仍是正整數。

p. s. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的幾何平均是 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$。

解：小於 24 的質數有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23，共九個。

所以這 2025 個數都可以寫成下面形式$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^p \cdot 11^q \cdot 13^r \cdot 17^s \cdot 18^t \cdot 23^w$

只考慮這九個次方的奇偶性，因為 $2^9 = 512$，所以必有兩個數，他們的次方的奇偶性一樣，所以幾何平均仍然是正整數（相乘後次方數均為偶數）。

所以可以有$\frac{2024-513}{2} > 512$ 對數，他們的幾何平均是正整數。因為數量大於 512，所以在這些對數的幾何平均中，又可以找到兩個的幾何平均是正整數！所以對應回去的原始四個數的幾何平均為正整數。

二、已知非負實數a,b,c滿足$ab+bc+ca=1$，求$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$最小值為何？

解：(1) 記$f(a,b,c)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$. 由對稱性，不妨設$0\le a\le b\le c$。先證明$f(0,a+b,\frac{1}{a+b})\le f(a,b,c)$，即證

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b\le\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\qquad (*)'\ ,$$

或等價於

$$(a+b)^2ab\le 2(1-ab)。\qquad (*)$$

而從$ab+bc+ca=1$和$0\le a\le b\le c$，可知$2(1-ab)=2c(a+b)\ge (a+b)^2\ge ab(a+b)^2$，即(*)成立。故$f(a,b,c)\ge f\left(0,a+b,\frac{1}{a+b}\right)$，即$f(a,b,c)\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b$。

(2)令$t=\frac{1}{a+b}+a+b$，以及$g(t)=t+\frac{1}{t}$，則因為$g(t)$函數在$t\ge 2$上是遞增函數，所以當$t\ge 2$時 $g(t)\ge g(2)=\frac{5}{2}$。即$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b\ge\frac{5}{2}$，所以$f(a,b,c)\ge\frac{5}{2}$。取$a=0,b=c=1$確實會得到$f(0,1,1)=\frac{5}{2}$。

三、在直線上給定兩點 A 和 B。點 P 在線段 AB 上。證明：當點 P 落在線段 AB 的中點時，$S(P)=\frac{1}{1+\overline{A}}+\frac{1}{1+\overline{BP}}$會達到最小值。符號 $\overline{\mathrm{AP}}$ 和 $\overline{\mathrm{BP}}$ 表示線段的長。

解：從點 A 往左和從點 B 往右分別取 1 單位長的線段，並將它們的端點分別記作點 C 和點 D。 如此 $S(P)$ 可以表示成

$$\mathrm{S(P)}=\frac{1}{\overline{\mathrm{CP}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{DP}}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}\quad 。$$

因為 $\overline{\mathrm{CD}}$ 是一個常數，所以當 $\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$ 越大，則 $S(P)$ 越小。

讓點 F 落在線段 CD 的中點（點 F 同時也落在線段 AB 的中點），那麼

$$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{FP}},\qquad \overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{DF}}-\overline{\mathrm{FP}}\ ，$$

或者

$$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CF}}-\overline{\mathrm{FP}},\qquad \overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{DF}}+\overline{\mathrm{FP}}\ 。$$

總之

$$\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{CF}}^{2}-\overline{\mathrm{FP}}^{2}\quad 。$$

因為 $\overline{\mathrm{CF}}$ 是一個常數，所以當點 P 和點 F 重合時，$S(P)$ 達到最小值。

四、已知函數 f 滿足$f(f(x))=x, f(xy+1)=f(x)f(y)+1$。請證明如果$p$是質數，則$f(p)$也是質數。請證明$f\left(\sqrt[2025]{114}\right)=\sqrt[2025]{114}$。

解：$f(1)=f(0x+1)=f(0)f(x)+1$。再由$f(f(x))=x$可知f是 1-1 的，所以$f(0)=0, f(1)=1$。$f(x+1)=f(1x+1)=f(1)f(x)+1=f(x)+1$。由此可知 x 為整數時$f(x)=x$。

因為$x^n=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)+1=(x-1)\big((x(x^{n-2}+\cdots+1)+1)+1\big)-1=\cdots=(x-1)(x(x(\ldots x(x+1)+1)+\cdots)+1)+1$

重覆使用$f(xy+1)=f(x)f(y)+1$可以得到

$$f(x^n)=f(x^n-1+1)=f(x-1)f(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)+1=\cdots$$
$$=f(x)^n$$

由此可知$(f(\sqrt[2025]{114}))^{2025}=f((\sqrt[2025]{114})^{2025})=114$。

因為 2025 是奇數，所以開 2025 次根號可以得到$f\left(\sqrt[2025]{114}\right)=\sqrt[2025]{114}$。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（台南區） 口試（二）

已知 a,b,c 為正實數並且滿足 $a+b+c=1$，求當 a 與 b 為多少時，

$$9^a+9^{\mathrm{b}}+9^{\frac{\mathrm{c}}{2}}$$

達到最小值。

解：設 $x=3^a$ 和 $y=3^b$，可得

$$9^a+9^b+9^{\frac{c}{2}}=3^{2a}+3^{2b}+3^{1-a-b}=x^2+y^2+\frac{3}{xy}\quad 。$$

使用算幾不等式與配方法可得

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\frac{3}{\mathrm{xy}}\geq 2\mathrm{xy}+\frac{3}{\mathrm{xy}}=\left(\sqrt{2\mathrm{xy}}-\sqrt{\frac{3}{\mathrm{xy}}}\right)^2+2\sqrt{6}\geq 2\sqrt{6}$$

上式等號分別成立於

$$x=y\quad 和\quad \sqrt{2xy}-\sqrt{\frac{3}{xy}}=0$$

如此可得

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\mathrm{x}^2=3^{2\mathrm{a}}$$

解得當

$$a=b=\frac{1}{4}(1-\log_3 2)$$

時， $9^a+9^{\mathrm{b}}+9^{\frac{\mathrm{c}}{2}}$ 有極小值 $2\sqrt{6}$。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（台南區） 口試（一）

設n是一個正整數，使得存在正整數$x_1, x_2, \ldots, x_n$,滿足

$$x_1 x_2 \ldots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 100n,$$

求n的最大可能值。

解：由已知，$x_1 x_2 \cdots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 100n$，顯然$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = n$，故$x_1 x_2 \cdots x_n \leq 100$。因等號無法成立，故$x_1 x_2 \cdots x_n \leq 99$。

而$x_1 x_2 \cdots x_n = [(x_1 - 1) + 1] + [(x_2 - 1) + 1] \cdots [(x_n - 1) + 1] \geq (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_n - 1) + 1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1$，

故$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_1 x_2 \cdots x_n + n - 1 \leq n + 98$。

於是$99(n + 98) \geq 100n$，解得$n \leq 99 \times 98 = 9702$。

此時取$x_1 = 99$，$x_2 = x_3 = \cdots = x_{9702} = 1$可使等號成立。

因此，n 的最大可能值為 9702。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　筆試（一）　編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

{參考解答}

一、設 a, b, c 為實數，$f(x) = ax^2 - 2(a-b)x + a - 2b + c,\ a \neq 0$。若$0 \leq x \leq 2$時，則$|f(x)| \leq 1$，求當$0 \leq x \leq 2$時，$|ax + 2b|$的最大值為何？

【參考解答】$f(1) = c$，$f(0) = a - 2b + c$，$f(2) = a + 2b + c$

$$a = \frac{1}{2}[f(0) + f(2) - 2f(1)]，b = \frac{1}{4}[f(2) - f(0)]$$

$$|ax + 2b| = \frac{1}{2}|(x-1)f(0) + f(2)(x+1) - 2f(1)x|$$

$$\leq \frac{1}{2}[|x-1| + |x+1| + 2|x|] = 4$$

二、求所有的正整數 n，使得$(35.5)^n + (28.5)^n$為正整數。

【參考解答】$(35.5)^n + (28.5)^n = \frac{1}{2^n}(71^n + 57^n)$

當 n 是偶數時，$71^n + 57^n \equiv (-1)^n + 1^n \equiv 2\ (mod\ 4)$

i.e., $71^n + 57^n = 4k + 2$ (k 是正整數)

故$(35.5)^n + (28.5)^n = \frac{1}{2^n}(71^n + 57^n) = \frac{1}{2^{n-1}}(2k+1)$，所以不可能為正整數

當 n 是奇數時，$71^n + 57^n = (71 + 57)(71^{n-1} - 71^{n-2} \cdot 57 + \cdots + 57^{n-1})$

$= 2^7(2l + 1)$ (l 是正整數)

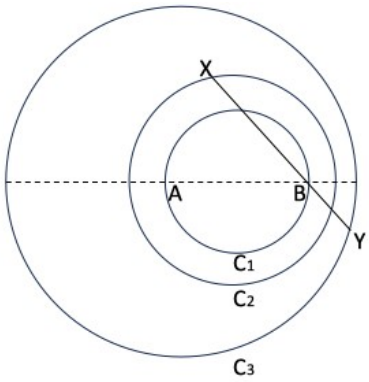
故 $n = 1, 3, 5, 7$

三、給定正整數 a,b，若對任意正整數 k，皆有 $\frac{a^{k+1}}{b^k}$ 為整數，試證 $\frac{a}{b}$ 為整數。

【參考解答】

當 $k=1$ 時，b 整除 a^2，令 p 為 b 之一質因數，則 p 亦整除 a。假設 $b=p^n b'$ 與 $a=p^m a'$，其中 b',a' 皆與 p 互質，我們說明 $n \le m$。因為 b^k 整除 a^{k+1}，所以有 $nk \le m(k+1)$，其中 k 為任意正整數。觀察到 $(n-m)k \le m$，若 $n>m$，則 $k \le \frac{m}{n-m}$，也就是說 k 小於某一正數，與 k 之假設矛盾。因此 $n \le m$，由於 p 為 b 之任意質因數，因此可推論 b 整除 a。

四、已知平面上三個圓C_i（$i=1,2,3$），其中，C_1的直徑$\overline{AB}=1$；C_2和C_1同圓心，C_2的直徑k滿足$1<k<3$； C_3以A為圓心，直徑為$2k$。考慮所有線段$\overline{XY}$，一端X在C_2上，另一端Y在C_3上，並且點B在線段$\overline{XY}$上，求線段$\overline{XY}$的最小長度為何？（以k表示）



【參考解答】:

設XY另交圓C_1於點E，延長XY交圓C_3於另一點Z。AB中點記為O，連結XO，ZA，AE，作OF⊥XY，如圖所示。

因為AE//OF（直徑所對圓周角為90度），所以

$\frac{OF}{AE}=\frac{OB}{AB}=\frac{1}{2}$

又因 $OX=\frac{k}{2}$，$AZ=k$

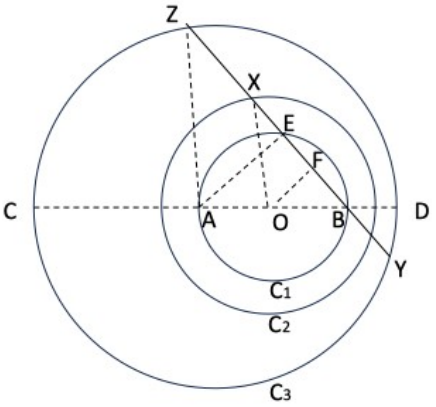
所以 $\frac{OX}{AZ}=\frac{1}{2}=\frac{OF}{AE}$ $\triangle ZAE \sim \triangle XOF$

$\angle AZB=\angle OXB$

所以$OX//AZ$。於是$ZX=XB$。

設$XB=x$，$BY=y$，那麼

$ZB\cdot BY=CB\cdot BD=(k+1)(k-1)$



即　$2xy = k^2 - 1$

所以　$x + y \geq 2\sqrt{xy} = \sqrt{2(k^2-1)}$。

等號在$x = y = \sqrt{\frac{k^2-1}{2}}$時成立。

故當$\frac{XB}{BY} = 1$時，XY的長度最小，最小值為$\sqrt{2(k^2-1)}$。

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽答案卷及試題

南區（高雄區）　　筆試（二）　　編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共 7 題，每題 3 分滿分 21 分。

(3)不可使用電算器。

(4)將答案填入答案欄內。

(5)答案卷、試題及計算紙須一同繳回。

1. 試求出共有多少種正多邊形，其內角的度數為整數?　　22

2. 若$f(x)=\frac{1+\sin x}{3-\cos x}$，則$f(x)$的最大值為何?　　3/4

3. 已知$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=a+b$，$\frac{1}{1-\sqrt{2}}=c+d$且$0\le b<1$，
$0\le d<1$，求　b^3+d^3+4bd =?　　無窮多解

4. 給定 $a,b\ge 0$，考慮拋物線 $y=x^2+ax-b$。已知此拋物線通過點 (a,b^2+8)，試求此拋物線的頂點與其在 x 軸上的兩個交點所構成的三角形面積最小為何？　　1

5. 設 x,y 為實數，若$\sqrt{x+3}=4-\sqrt{2y-1}$，
求$x+6y$的最大值與最小值之和為多少?　　60

6. 將一個三位數的三個數字順序顛倒(舉例:247 順序顛倒的數為 742)，再將所得到的數與原數相加，若所得到的和中沒有一個數字是偶數，則稱這個數為「奇和數」。那麼所有三位數中，有幾個奇和數？　　100

7. 已知ΔABC的邊長a,b,c $(a\le b\le c)$，滿足a,b,c均為整數；a,b,c組成等 比數列； a與c中至少有一個等於 100。
求有多少種(a,b,c)的不同組合個數?　　10

114 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題(一)

作答說明：

(1) 作答時間：2 小時，不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 9 分，其餘題目各 10 分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答。

1. 如果三角形的三邊長皆為質數，試證此三角形的面積必不是正整數值。

2. 已知雙曲線 $xy=-1$ 的圖形之兩個分支分別在第二、四象限，如果正三角形 ABC 的三個頂點位於此雙曲線上，且 $A(1,-1)$，而 B, C 兩點都在第二象限，試求 B, C 兩點坐標。

3. 在銳角三角形 ABC 的中，試證: $sinA+sinB+sinC>1+cosA+cosB+cosC$。

4. 試問有多少種方法能從集合$\{1,2,3,\ldots,2025\}$中選取 1015 個不同的數，使得其中任意兩個數之差都不等於 10。

5. 已知三正數 a,b,c 滿足下列條件:

$$a^2+ab+\frac{1}{3}b^2=34,\ \frac{1}{3}b^2+c^2=13,\ a^2+ac+c^2=29\ ,$$

試求 $ab+2bc+3ca$ 之值。

114 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題(二)

作答說明：

(1)作答時間：1 小時，不可使用電算器。

(2)本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3)請將各題答案寫在答案卷上對應的欄位。

(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5)需使用黑色或藍色筆作答。

1 已知 $a>0$ 是方程式 $x^2-2x-2025=0$ 的一個正根，如果滿足下列等式

$$3+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{a}}}=b+\sqrt{c}$$

成立，其中 b 和 c 皆為正整數，則 $c-b=$_____。

2. 已知函數

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+\frac{\pi^2}{16}}{x\sin x}$$，其中 $0<x<\pi$，

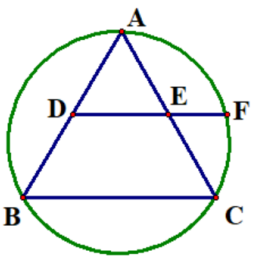
則 $f(x)$ 有最小值時的 $x=$ _____。

3. 已知 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+2}$，則級數 $\sum_{k=1}^{113} f\left(\frac{2k}{114}\right)=$ _____。

4. 設 $S=\{1,2,3,\ldots,8\}$，考慮由 S 對應至 S 的函數 f 使得對任意的整數 $x\in S$(即 x 為集合 S 之元素)，均可使得 $f(f(x))=1$ 成立，則滿足此條件的函數 f 之個數為_____。

5. 已知 a,b,x 為正數，且 $\log_2(ax)\cdot\log_2(bx)+4=0$，則 $\frac{a}{b}$ 的範圍為_____。

6. 如圖，ΔABC 為一正三角形，點 D,E 分別邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 之中點，過 D 點，作射線 $\overrightarrow{DE}$ 交 ΔABC 之外接圓於點 F，則 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ 之值為_____。



【口試題】

試問是否存在一整係數多項式 $P(x)$，使得 $P(1)=4$，且 $P(4)=9$？

【口試題】

設 n 是正整數，證明：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<5$。

114 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題(一) 參考解答

作答說明：

(1) 作答時間：2 小時，不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 9 分，其餘題目各 10 分。

(3) 須將計算及證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 試題紙及計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5) 需使用黑色或藍色筆作答。

1. 如果三角形的三邊長皆為質數，試證此三角形的面積必不是正整數值。

【參考解答】設三角形 ABC 之三邊長分別為 a,b,c，且皆為質數。利用海龍公式，則 ΔABC 的面積 $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$。令 $t=a+b+c$，因此

$A=\sqrt{\frac{t}{2}(\frac{t-2a}{2})(\frac{t-2b}{2})(\frac{t-2c}{2})}\Rightarrow 16A^2=t(t-2a)(t-2b)(t-2c)$，又等號左邊為偶數，所以 $t(t-2a)(t-2b)(t-2c)$ 必為偶數，因此 $t=a+b+c$ 為偶數。以下分二種情形討論:

(1) 如果 a,b,c 皆為偶數，因為此三數皆為質數，所以 $a=b=c=2$，因此

$16A^2=6\times 2\times 2\times 2=48\Rightarrow A=\sqrt{3}$，故面積不是整數值。

(2) 如果 a,b,c 為二奇一偶，為不失去一般性，我們不妨假設 $a=2$，且 b,c 為奇數，欲證: $b=c$

如果 $b\neq c$，不妨設 $b<c\Rightarrow c-b\geq 2\Rightarrow c\geq b+2=b+a$，但與 a,b,c 為 ΔABC 的三邊長不合，因此 $b=c$。又 $t=a+b+c=2+2b\Rightarrow 16A^2=t(t-2a)(t-2b)(t-2c)$，所以

$$16A^2=(2+2b)(t-2a)(t-2b)(t-2c)=(2+2b)(2b-2)(2+2b-2b)(2+2b-2b)$$
$$=16(b+1)(b-1)=16(b^2-1)\Rightarrow A^2=b^2-1\Rightarrow b^2=A^2+1\Rightarrow b^2-A^2=1$$
$$\Rightarrow 1=(b+A)(b-A)$$

因為 $b>2$ 為奇數，所以 $b+A\geq 2$，故不合，因此不是整數值。

2. 已知雙曲線 $xy=-1$ 的圖形之兩個分支分別在第二、四象限，如果正三角形 ABC 的三個頂點位於此雙曲線上，且 $A(1,-1)$，而 B, C 兩點都在第二象限，試求 B, C 兩點坐標。

【參考解答】 $\boxed{(-2+\sqrt{3},2+\sqrt{3})\text{，}(-2-\sqrt{3},2-\sqrt{3})}$

設以 A 為圓心，AB = r 為半徑，則圓方程式為

$$(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$$

因為 ABC 正三角形，所以 B,C 兩點滿足

$$\begin{cases}xy=-1---------(1)\\(x-1)^2+(y+1)^2=r^2--(2)\end{cases}$$

將式(1)代入式(2)中，$(x-1)^2+\left(\frac{-1}{x}+1\right)^2=r^2$

$$(x-1)^2x^2+(-1+x)^2=r^2x^2$$

$$x^4-2x^3+x^2+x^2-2x+1-r^2x^2=0$$
$$(x^2+1)^2-2x(x^2+1)+x^2-(r^2x^2+x^2)=0$$
$$(x^2-x+1)^2-\left(\sqrt{r^2x^2+x^2}\right)^2=0$$

$$x^2-x+1=\pm\sqrt{r^2x^2+x^2}$$

因為 B,C 兩點在第 2 象限，所以 $x<0$，

$$x^2-x+1=-x\sqrt{r^2+1}-----(3)$$

$$x^2+\left(-1+\sqrt{r^2+1}\right)x+1=0$$

設 B,C 兩點坐標為 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，利用根與係數性質，則 x_1,x_2 滿足

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\left(-1+\sqrt{r^2+1}\right)\\ x_1\cdot x_2=1\end{cases}$$

所以

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4\cdot x_1\cdot x_2$$
$$(x_1-x_2)^2=\left(-1+\sqrt{r^2+1}\right)^2-4$$

同理，$y>0$，

$$y^2+y+1=+y\sqrt{r^2+1}-----(4)$$

$$(y_1-y_2)^2=\left(-1+\sqrt{r^2+1}\right)^2-4$$

因為 ABC 正三角形，所以

$$BC^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=r^2=2\left[\left(-1+\sqrt{r^2+1}\right)^2-4\right]$$

化簡得

$$r^2=24$$

代入(3),(4)得

$$x_1,x_2=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)，y_1,y_2=\left(2\pm\sqrt{3}\right)$$

因為$A(1,-1)$雙曲線頂點，AB＝AC，所以，B,C 兩點對稱 $y=-x$，

所以，B,C 兩點坐標為 $\boxed{\left(-2+\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)，\left(-2-\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right)}$。 ■

3. 在銳角三角形 ABC 的中，試證: $sinA+sinB+sinC>1+cosA+cosB+cosC$。

【參考解答】因為 $sinA+sinB+sinC-cosA-cosB-cosC$

$$=(sinA+sinB)-(cosA+cosB)+(sinC-cosC)$$
$$=2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}-2cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}+2sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2}-2cos^2\frac{C}{2}+1$$
$$=1+2cos\frac{A-B}{2}\left(sin\frac{A+B}{2}-cos\frac{A+B}{2}\right)+2cos\frac{C}{2}\left(sin\frac{C}{2}-cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2cos\frac{A-B}{2}\left(-sin\frac{C}{2} + cos\frac{C}{2}\right) + 2cos\frac{C}{2}\left(sin\frac{C}{2} - cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\left(sin\frac{C}{2} - cos\frac{C}{2}\right)\left(cos\frac{C}{2} - cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sqrt{2}sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cdot(-2)sin\frac{C+A-B}{2}sin\frac{C-A+B}{2}$$

$$= 1 + 4\sqrt{2}sin\left(-\frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\frac{C+A-B}{2}sin\frac{C-A+B}{2}$$

因為 ABC 銳角三角形，所以

$$A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ ，0 < \frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} < \frac{\pi}{4}\ ，0 < \frac{C+A-B}{4} < \frac{\pi}{4}\ ，0 < \frac{C-A+B}{4} < \frac{\pi}{4}$$

$$sin\left(-\frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0\ ，sin\frac{C+A-B}{2} > 0\ ，sin\frac{C-A+B}{2} > 0$$

所以，$sinA + sinB + sinC - cosA - cosB - cosC$

$$= 1 + 4\sqrt{2}sin\left(-\frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\frac{C+A-B}{2}sin\frac{C-A+B}{2} > 1$$

故 $sinA + sinB + sinC > 1 + cosA + cosB + cosC$ 得證■

4. 試問有多少種方法能從集合$\{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$中選取 1015 個不同的數，使得其中任意兩個數之差都不等於 10。

【參考解答】$102^5 = 11040808032$。

將集合$\{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$依除以 10 的餘數分為 10 個集合。

$A_i = \{n: 1 \le n \le 2025, n$除以 10 餘$i\}$，其中$0 \le i \le 9$。則$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$皆有 203 個整數，而$A_6, A_7, A_8, A_9, A_0$皆有 202 個整數。

由於在各個集合中不能選取相鄰元素，故在A_1, A_2, A_3, A_4, A_5中，各自最多取 102 個整數，而在A_6, A_7, A_8, A_9, A_0中，各自最多取 101 個整數。因此最多選取 1015 個整數，使得其中任意兩個數之差不等於 10。

若要選取 1015 個整數，可知在A_1, A_2, A_3, A_4, A_5中，選取方法是固定的。而在A_6, A_7, A_8, A_9, A_0中，各有 102 種選取方法。故選取方法為$102^5 = 11040808032$。

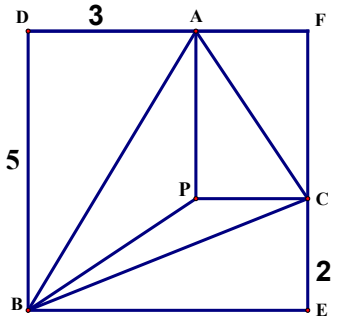
5. 已知三正數a, b, c滿足下列條件:

$$a^2 + ab + \frac{1}{3}b^2 = 34,\ \frac{1}{3}b^2 + c^2 = 13,\ a^2 + ac + c^2 = 29\ ，$$

試求$ab + 2bc + 3ca$之值。

【參考解答】利用邊角關係求解，如圖，

由已知條件第一式知，根據餘弦定理，



$a^2+ab+\frac{1}{3}b^2=34\Rightarrow a^2+(\frac{1}{\sqrt{3}}b)^2-2a\times(\frac{1}{\sqrt{3}}b)\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=(\sqrt{34})^2$

代表在ΔAPB中，其二邊長分別為$a=\overline{BP},\frac{1}{\sqrt{3}}b=\overline{AP}$，夾角為$150°$，且第三邊長為$\sqrt{34}=\overline{AB}$。

又第二式$\frac{1}{3}b^2+c^2=13$表示一直角三角形APC，其二股分別為$\overline{AP}=\frac{1}{\sqrt{3}}b$及$\overline{PC}=c$，斜邊為$\overline{AC}=\sqrt{13}$。同理，$a^2+ac+c^2=29\Rightarrow a^2+c^2-2a\times c\times(-\frac{1}{2})=(\sqrt{29})^2$

代表在ΔBPC中，其二邊長分別為$\overline{BP}=a,\overline{PC}=c$，夾角為$120°$，且第三邊長為$\overline{BC}=\sqrt{29}$。

如圖所示，因為$13=2^2+3^2,29=2^2+5^2,34=3^2+5^2$，所以$\Delta ABC$的面積等於正方形面積減去三個直角三角形$ABD,ACF,BCE$的面積，即$25-\frac{1}{2}\times3\times5-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times2\times5=\frac{19}{2}$

$$\frac{19}{2}=\frac{1}{2}a\times\frac{1}{\sqrt{3}}b\times\sin150°+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}b\times c+\frac{1}{2}a\times c\times\sin120°$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\times ab+\frac{1}{2\sqrt{3}}\times bc+\frac{\sqrt{3}}{4}\times ac$$

故$ab+2bc+3ca=38\sqrt{3}$。

114 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題(二)參考解答

作答說明：

(1)作答時間：1 小時，不可使用電算器。

(2)本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。

(3)請將每題答案寫在答案卷上對應的欄位。

(4)試題紙與計算紙必須連同答案卷一併繳回。

(5)需使用黑色或藍色筆作答。

1 已知 $a>0$ 是此方程式 $x^2-2x-2025=0$ 的一個正根，如果滿足下列等式

$$3+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{a}}}=b+\sqrt{c}$$

成立，其中b 和 c 皆為正整數，則$c-b$=_____。

【參考解答】 $c-b=2024$。

利用求根公式可得

$$a=\frac{2+\sqrt{4+4\times 2025}}{2}=1+\sqrt{2026}。$$

根據題意可得

$$a^2=2a+2025 \quad \Rightarrow \quad a=2+\frac{2025}{a}。$$

因此

$$3+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{a}}}=3+\cfrac{2025}{2+\cfrac{2025}{a}}=3+\frac{2025}{a}=1+a=2+\sqrt{2026}。$$

所以 $b=2$ 和 $c=2026$ 。

2.已知函數

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+\frac{\pi^2}{16}}{x\sin x}$$ ，其中 $0<x<\pi$，

則 $f(x)$有最小值時的 $x=$ _____。

【參考解答】 $x=\frac{\pi}{6}$ 。

利用配方可得

$$\frac{9x^2\sin^2 x+\frac{\pi^2}{16}}{x\sin x}=\frac{\left(3x\sin x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\pi x\sin x}{x\sin x}=\frac{\left(3x\sin x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{x\sin x}+\frac{3}{2}\pi。$$

因為 $0 < x < \pi$ ，我們能推論 $x\sin x > 0$ 且當$x\sin x = \frac{\pi}{12}$ 時，此函數達到最小值 $\frac{3}{2}\pi$ 。最後，我們能夠推論當 $x = \frac{\pi}{6}$ 時，$x\sin x = \frac{\pi}{12}$ 。

3. 已知 $f(x) = \frac{2^x}{2^x+2}$ ，則級數 $\sum_{k=1}^{113} f\left(\frac{2k}{114}\right) =$ _____。

【參考解答】**56.5** 或 $56\frac{1}{2}$。

考慮 $x + y = 2$，$x > 0$，$y > 0$，則

$$f(x) + f(y) = \frac{2^x}{2^x+2} + \frac{2^y}{2^y+2} = \frac{2^{x+y} + 2^{x+1} + 2^{x+y} + 2^{y+1}}{(2^x+2)(2^y+2)} = \frac{2^{x+1} + 2^{y+1} + 2\cdot 4}{2^{x+1} + 2^{y+1} + 2\cdot 4} = 1$$

所以

$$\sum_{k=1}^{113} f\left(\frac{2k}{114}\right) = f\left(\frac{2}{114}\right) + f\left(\frac{4}{114}\right) + f\left(\frac{6}{114}\right) + \cdots + f\left(\frac{226}{114}\right)$$

$$= \left[f\left(\frac{2}{114}\right) + f\left(\frac{226}{114}\right)\right] + \left[f\left(\frac{4}{114}\right) + f\left(\frac{224}{114}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{112}{114}\right) + f\left(\frac{116}{114}\right)\right] + f\left(\frac{114}{114}\right)$$

$$= 1 + 1 + \ldots + 1 + f\left(\frac{114}{114}\right)$$

其中，$\frac{112-2}{2} + 1 = 55 + 1 = 56$，共有 56 個 1 相加，$f\left(\frac{114}{114}\right) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$

所以 ， $\boxed{\sum_{k=1}^{113} f\left(\frac{2k}{114}\right) = 56 + 0.5 = 56.5}$ ■

4. 設$S = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$，考慮由$S$對應至$S$的函數$f$使得對任意的整數$x \in S$(即 x為集合S之元素)，均可使得 $f(f(x)) = 1$成立，則滿足此條件的函數f之個數為_____。

【參考解答】**6322**。

首先，可先得出$f(1) = 1$。如果不對，我們可設$f(1) = a \neq 1$，所以由條件$f(f(1)) = 1$ 可知$f(a) = 1$。因而可知$f(f(a)) = f(1) = a \neq 1$，與條件矛盾，因此$f(a) = 1$。

其次，設$A = \{x: 2 \leq x \leq 8, f(x) = 1\}$。由條件可知$A \neq \emptyset$。
設$|A| = k$，其中$1 \leq k \leq 7$。若整數$x \in S$、$x \notin A$且$x \neq 1$，可由條件知$f(x) \neq 1$且$f(x) \in A$。其中集合A有$\binom{7}{k}$種選取方式。剩餘不在A中且不為 1 的整數x，其$f(x)$有k種對應方式，滿足此要求的整數共$7 - k$個。可知滿足條件的函數個數為

$\sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} k^{7-k} = 7 \times 1 + 21 \times 32 + 35 \times 81 + 35 \times 64 + 21 \times 25 + 7 \times 6 + 1 = 6322$。

5. 已知 a, b, x 為正數，而且 $log_2(ax) \cdot log_2(bx) + 4 = 0$，則 $\frac{a}{b}$ 的範圍為_____。

【參考解答】$\boxed{0<\frac{a}{b}\le\frac{1}{16}\text{或}\frac{a}{b}\ge 16}$。

$$log_2(ax)\cdot log_2(bx)+4=0\text{，}log_2[\frac{a}{b}(bx)]\cdot log_2(bx)+4=0$$

$$\left[log_2\left(\frac{a}{b}\right)+log_2(bx)\right]\cdot log_2(bx)+4=0$$

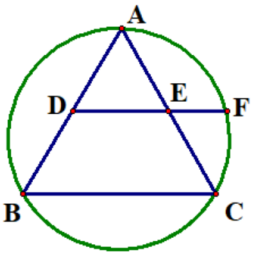
$$[log_2(bx)]^2+log_2\left(\frac{a}{b}\right)\cdot log_2(bx)+4=0$$

因為 a,b,x 為正數，所以 bx 為正數，$log_2(bx)$ 為實數，判別式≥ 0

$\left[log_2\left(\frac{a}{b}\right)\right]^2-4\cdot 1\cdot 4\ge 0$，$log_2\left(\frac{a}{b}\right)\le -4$ 或 $log_2\left(\frac{a}{b}\right)\ge 4$

所以 ， $\boxed{0<\frac{a}{b}\le\frac{1}{16}\text{或}\frac{a}{b}\ge 16}$ ■

6.如圖，ΔABC 為一正三角形，點 D,E 分別邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 之中點，過 D 點，作射線 $\overrightarrow{DE}$ 交 ΔABC 之外接圓於點 F ，則 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ 之值為_____。



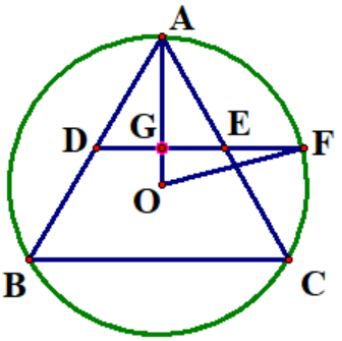
【參考解答】Ans: $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ 。

設 ΔABC 之外接圓圓心為 O ，半徑為 r ，且

$\overline{BC}=a$ ，$\therefore\overline{AO}=\overline{OF}=r$ ，

$\overline{GE}=\frac{a}{4}\Rightarrow\overline{AG}=\frac{\sqrt{3}}{4}a,r=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，因此

$\overline{OG}=\overline{AO}-\overline{AG}=\frac{\sqrt{3}}{3}a-\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}}{12}a$ ，



$\because\overline{DE}=\frac{a}{2}\Rightarrow\overline{GF}=\sqrt{\frac{a^2}{3}-\frac{3}{144}a^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}a\Rightarrow\overline{EF}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)a$

$\therefore\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}=\frac{\frac{1}{2}a}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

【口試題】

試問是否存在一整係數多項式$P(x)$，使得$P(1)=4$，且$P(4)=9$？

【參考解答】**Ans:**不存在

設多項式$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，因此

$$4=P(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$$
$$9=P(4)=a_n4^n+a_{n-1}4^{n-1}+\cdots+4a_1+a_0$$

將上述二式相減，得$5=a_n(4^n-1)+a_{n-1}(4^{n-1}-1)+\cdots+(4-1)a_1$，因為

$4^k-1=(4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+4+1)=3(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+4+1)$，因此$4^k-1$為 **3** 的倍數，對任意正整數$k$皆成立。故$5=a_n(4^n-1)+a_{n-1}(4^{n-1}-1)+\cdots+(4-1)a_1$必為 **3** 的倍數，故不合。因此不可能存在滿足條件之整係數多項式$P(x)$。

【口試題】

設 n 是正整數，證明：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<5$。

【參考解答】

欲證:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<5-\frac{1}{n}$$

當 n=2 時，$1+\frac{1}{2^2}=1+\frac{1}{4}<5-\frac{1}{2}$

原式成立。

假設 $n=k$ 成立，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<5-\frac{1}{k}$

$n=k+1$時，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<5-\frac{1}{k}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<5-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<5+\frac{-k^2-2k-1+k}{k(k+1)^2}$$

$$=5-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<5-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=5-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=5-\frac{1}{k+1}$$

所以，$n=k+1$時，原式成立。由學歸納法得

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<5-\frac{1}{n}$$

所以，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<5$ ■