伍、筆試試題及參考解答

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（一）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時(13:20~15:20)。

(2) 配分：每題 35 分。

(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 不可使用電算器。

(5) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：設正實數數列 $t_1, t_2, \cdots$ 是一個公比為 10 的等比數列. 試求所有可能的正整數 n 及所有的 n 次多項式 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，滿足：最高次項係數 a_n 是整數，且

$$\left| f(\log_{10} t_k) \right| = 93, \quad \forall\, k = 1, 2, \cdots, n+1.$$

【問題二】：在某一個 ΔABC 中，過頂點 B 作一直線與 $\angle C$ 的平分線垂直，垂足為 D；過頂點 C 作一直線與 $\angle B$ 的平分線垂直，垂足為 E. 設點 D 在 ΔABC 的外部，點 E 在 ΔABC 的內部且 ΔABC 的內切圓在邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CA}$ 上的切點分別為點 P 、 Q. 試證：直線 DE 通過 P 、 Q 兩點.

【問題三】：正八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的內部可被它的對角線分割成 80 個區域. 試求所有可能的正整數 n，使得我們可將其中 n 個區域塗色後，滿足：每一個 $\Delta A_iA_jA_k$ 的內部都恰有一個塗色的區域.

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（一）答案卷

編號：_____

注意事項：

(6) 時間分配：2 小時(13:20~15:20)。

(7) 配分：每題 35 分。

(8) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(9) 不可使用電算器。

(10)試題與答案卷一同繳回。

題　　號	問題一	問題二	問題三
初閱成績			
閱卷委員簽名			
覆閱成績			
閱卷委員簽名			

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（一）參考解答

【問題一】：設正實數數列$t_1, t_2, \cdots$是一個公比為 10 的等比數列. 試求所有可能的正整數n及所有的n次多項式$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，滿足：最高次項係數$a_n$是整數，且

$$\left|f(\log_{10} t_k)\right|=93,\ \forall k=1,2,\cdots,n+1.$$

【參考解答】：令$d_k=\log_{10} t_k$，則$<d_k>$為公差為 1 的等差數列. 注意：滿足條件的n次多項式為

$$f(x)=a_n\prod_{k=1}^{n}(x-d_k)+a_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-d_k)+\cdots+a_1(x-d_1)+a_0,\ \text{其中}\ a_0=\pm 93.$$

(1) 當$n=1$時，$(a_0,a_1)=(93,-186)$，$(-93,186)$. 即有 2 個一次多項式

$$f(x)=-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=186(x-d_1)+93.$$

(2) 當$n=2$時，$(a_0,a_1,a_2)=(93,0,-93)$，$(93,-186,93)$，$(93,-186,186)$，$(-93,0,93)$，$(-93,186,-93)$，$(-93,186,-186)$. 即有 6 個二次多項式

$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$
$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93.$$

(3) 當$n=3$時，$(a_0,a_1,a_2,a_3)=(93,0,0,-31)$，$(93,0,-93,62)$，$(93,0,-93,93)$，$(93,-186,93,-31)$，$(93,-186,186,-93)$，$(93,-186,186,-124)$，$(-93,0,0,31)$，$(-93,0,93,-62)$，$(-93,0,93,-93)$，$(-93,186,-93,31)$，$(-93,186,-186,93)$，$(-93,186,-186,124)$. 即有 12 個三次多項式

$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93,$$
$$f(x)=62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$
$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$
$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93,$$

$$f(x)=-62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$
$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93.$$

(4) 當 $n=4$ 時，$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)=$ $(93,0,0,-31,31)$，$(93,-186,186,-93,31)$，$(93,-186,186,-124,62)$，$(-93,0,0,31,-31)$，$(-93,186,-186,93,-31)$，$(-93,186,-186,124,-62)$，即有 6 個四次多項式

$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93,$$
$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93,$$
$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=-62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$+186(x-d_1)-93.$$

(5) 現在我們證明當 $n\geq 5$，沒有滿足條件的 n 次多項式 $f(x)$．假設存在，則由已知條件得

$$a_1+a_0=f(d_2)=\pm 93; \quad (1)$$
$$2a_2+2a_1+a_0=f(d_3)=\pm 93; \quad (2)$$
$$6a_3+6a_2+3a_1+a_0=f(d_4)=\pm 93; \quad (3)$$
$$24a_4+24a_3+12a_2+4a_1+a_0=f(d_5)=\pm 93; \quad (4)$$
$$\vdots$$
$$n!a_n+\frac{n!}{1!}a_{n-1}+\frac{n!}{2!}a_{n-2}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!}a_1+a_0=f(d_{n+1})=\pm 93. \quad (n)$$

由[(n)式 $-C_1^n\times(n-1)$ 式 $+C_2^n\times(n-2)$ 式 $-\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\times(1)$式]可得

$$n!a_n+(-1)^{n+1}a_0=(\pm 1\pm C_1^n\pm C_2^n\pm\cdots\pm C_{n-1}^n)\cdot 93.$$

因此，

$$a_n=\frac{(\pm 1\pm C_1^n\pm C_2^n\pm\cdots\pm C_{n-1}^n\pm 1)}{n!}\cdot 93.$$

故，當 $n=5$ 時，

$$a_5=\frac{\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1}{40}\cdot 31.$$

因為 a_5 是一整數，$\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1$ 必須是 40 的倍數，其唯一可能是

$$\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1=0,$$

即 $a_5=0$，不合．當 $n=6$ 時，

$$a_6=\frac{\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1}{240}\cdot 31.$$

因為 a_6 是一整數，$\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1$ 必須是 240 的倍數，其唯一可能是

$$\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1=0;$$

即 $a_6=0$，不合．當 $n=7$ 時，

$$a_7=\frac{\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1}{1680}\cdot 31.$$

因為 a_7 是一整數，$\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1$ 必須是 1680 的倍數，其唯一可能是

$$\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1=0;$$

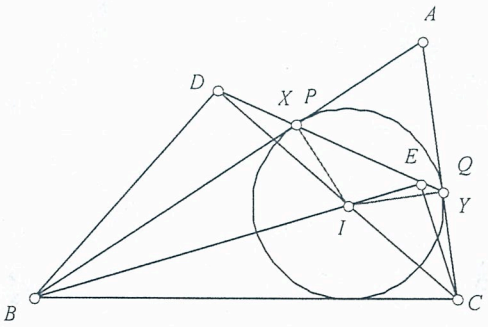
即 $a_7=0$，不合．當 $n\geq 8$ 時，

$$|a_n|\leq\frac{(1+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_{n-1}^n+1)\cdot 93}{n!}=\frac{2^n\cdot 93}{n!}<1.$$

因為 a_n 是一整數，故 $a_n=0$，不合．

【問題二】：在某一個 ΔABC 中，過頂點 B 作一直線與 $\angle C$ 的平分線垂直，垂足為 D；過頂點 C 作一直線與 $\angle B$ 的平分線垂直，垂足為 E．設點 D 在 ΔABC 的外部，點 E 在 ΔABC 的內部且 ΔABC 的內切圓在邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{CA}$ 上的切點分別為點 P 、Q．試證：直線 DE 通過 P 、Q 兩點．

【參考解答】：



設直線 DE 與 $\overline{AB}$ 交於 X，與 $\overline{CA}$ 交於 Y，而 I 為 ΔABC 的內心．我們僅需證明點 P 與點 X 重合，且點 Q 與點 Y 重合．因為 $\angle BDC=\angle CEB=90°$，所以 D、E、C、B 四點共圓．於是，可得

$$\angle XDI=\angle EDC=(1/2)\angle ABC=\angle XBI.$$

由此可知，B、I、X、D 四點共圓．因此，$\angle IXB=\angle IDB=90°$，即 $\overline{IX}\perp\overline{AB}$，亦即 ΔABC 的內切圓與 $\overline{AB}$ 切於 X 點，因而點 P 與點 X 重合．另一方面，由 D、E、C、B 四點共圓，可得

$$\angle YEI=180°-\angle DEB=180°-\angle DCB=180°-(1/2)\angle ACB=180°-\angle YCI.$$

由此可知 C、I、Y、E 四點共圓．因此，$\angle IYC=\angle IEC=90°$，即 $\overline{IY}\perp\overline{AC}$，亦即 ΔABC 的內切圓與 $\overline{AC}$ 切於 Y 點，因而點 Q 與點 Y 重合．

【問題三】：正八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的內部可被它的對角線分割成 80 個區域. 試求所有可能的正整數 n，使得我們可將其中 n 個區域塗色後，滿足：每一個 $\Delta A_iA_jA_k$ 的內部都恰有一個塗色的區域.

【參考解答】：考慮 6 個互不重疊的三角形：$\Delta A_1A_2A_3$，$\Delta A_1A_3A_4$，$\Delta A_1A_4A_5$，$\Delta A_1A_5A_6$，$\Delta A_1A_6A_7$，$\Delta A_1A_7A_8$. 因每一個三角形的內部都有一個塗色的區域，故 $n\geq 6$. 另一方面，若 $n\geq 7$，則由鴿籠原理可知上述的6個三角形中，必有一個三角形有兩個塗色的區域，故 $n\leq 6$. 以下證明 $n=6$ 是可能的. 令

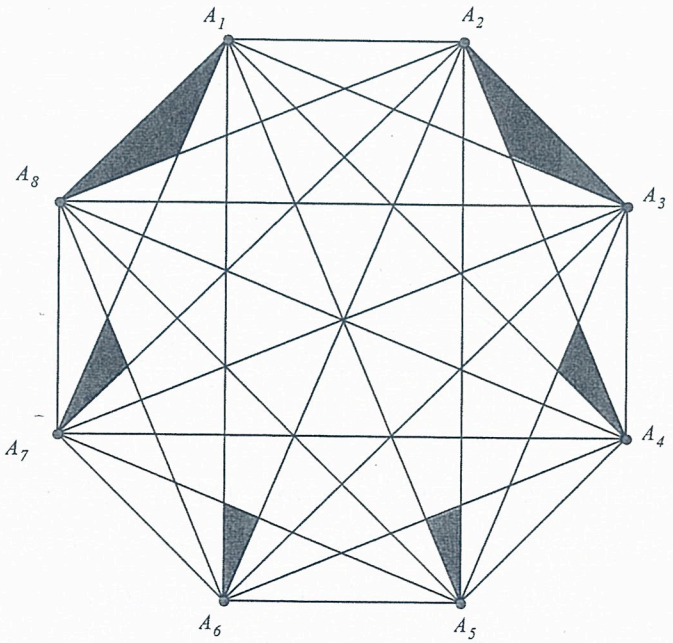
$$S_p=\Delta A_1A_2A_{p+2}\cap\Delta A_{p+1}A_{p+2}A_{p+3},\ \forall\ p=1,2,\ \cdots,\ 6;$$

則將 $S_1, S_2, \cdots, S_6$ 塗色即可滿足所求. 事實上，考慮任一 $\Delta A_iA_jA_k$，其中 $1\leq i<j<k\leq 8$.

(i) 當 $i=1$ 時($k\geq 3$)，則 S_{k-2} 是 $\Delta A_iA_jA_k$ 唯一的塗色區域.

(ii) 當 $i\geq 2$ 時($j\geq 3$)，則 S_{j-2} 是 $\Delta A_iA_jA_k$ 唯一的塗色區域.

下圖顯示可能的 6 個塗色區域.



九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（二）試題

注意事項：

(1)時間分配：2 小時(16:00~18:00)。

(2)配分：每題 35 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：在 ΔABC 中, D、E 及 F 分別在三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 及 $\overline{AB}$ 上, 且使得 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 三線段交於一點. 過 F 作平行於直線 ED 的直線交 $\overline{AD}$ 於 K, 並交 $\overline{CB}$ 的延長線於 L. 試證：$\overline{FK}=\overline{FL}$.

【問題二】：設正實數 a,b 滿足：$a^3+b^3+3ab=1$. 試求 $(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$ 的最小值.

【問題三】：試求所有的正整數 n, 使得 $n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 為一完全平方數.

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（二）答案卷

編號：_____

注意事項：

(11)時間分配：2 小時(16:00~18:00)。

(12)配分：每題 35 分。

(13)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(14)不可使用電算器。

(15)試題與答案卷一同繳回。

題　　號	問題一	問題二	問題三
初閱成績			
閱卷委員簽名			
覆閱成績			
閱卷委員簽名			

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（二）參考解答

【問題一】：在ΔABC中，D、E及F分別在三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$及$\overline{AB}$上，且使得$\overline{AD}$、$\overline{BE}$及$\overline{CF}$三線段交於一點．過F作平行於直線ED的直線交$\overline{AD}$於K，並交$\overline{CB}$的延長線於L．試證：$\overline{FK}=\overline{FL}$．

【參考解答】：(1) 由西瓦定理：$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=1$．

(2) 延長$\overline{ED}$交$\overline{AB}$延長線於M，則由孟氏定理

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\times\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}=1.$$

(3) 由(1), (2)知

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}},\ \text{即}\ \frac{\overline{AF}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}.\qquad (*)$$

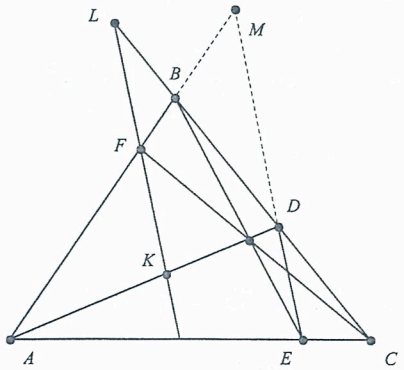
(4) 由$\overline{FL}//\overline{DM}$知$\Delta AFK\sim\Delta AMD$，$\Delta BLF\sim\Delta BDM$；故得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{MD}},\ \frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{MD}}.\qquad (**)$$

(5) 由(*)及(**)可得

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{MD}},$$

所以$\overline{FK}=\overline{FL}$．



【問題二】：設正實數a,b滿足：$a^3+b^3+3ab=1$．試求$(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$的最小值．

【參考解答一】：因為$a^3+b^3+3ab=1$，可改寫為$a^3+b^3+(-1)^3-3ab(-1)=0$．所以

$$(a+b-1)[(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2]=0.$$

因此，$a+b=1$ 或 $a=b$且$a=b=-1$ (a,b為正實數，不合)．由算幾不等式

$$ab\le(\frac{a+b}{2})^2\le\frac{1}{4}. \qquad (1)$$

令$f(a,b)=(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$，則由(1)可得

$$\begin{aligned}
f(a,b)&=(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3\\
&=a^3+b^3+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+3(a+b)+\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\\
&=a^3+b^3+\frac{1}{a^3b^3}(a^3+b^3)+3(a+b)+\frac{3}{ab}(a+b)\\
&=(1+\frac{1}{a^3b^3})(a^3+b^3)+3+\frac{3}{ab}\\
&\ge(1+4^3)(a^3+b^3)+3+12\\
&=65(1-3ab)+15\\
&\ge65(1-\frac{3}{4})+15\\
&=\frac{125}{4}.
\end{aligned}$$

等號成立的充要條件為$a=b=\frac{1}{2}$．

【參考解答二】：由不等式$x^3+y^3+z^3\ge3(\frac{x+y+z}{3})^3$及參考解答一中所定義的$f(a,b)$可得

$$f(a,b)+(\frac{5}{2})^3\ge3\left(\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{5}{2}}{3}\right)^3=3\left(\frac{1+\frac{1}{ab}+\frac{5}{2}}{3}\right)^3\ge3\left(\frac{1+4+\frac{5}{2}}{3}\right)^3=\frac{375}{8}.$$

所以，$f(a,b)\ge\frac{375}{8}-(\frac{5}{2})^3=\frac{125}{4}$．

【參考解答三】：設$g(x)=(x+\frac{1}{x})^3$，則$g(x)$為$(0,1)$上的凸函數．由$b=1-a$可得

$$f(a,b)=g(a)+g(1-a)\ge2\cdot g(\tfrac{1}{2}\cdot a+\tfrac{1}{2}\cdot(1-a))=2\cdot g(\tfrac{1}{2})=2\cdot\frac{125}{8}=\frac{125}{4}.$$

【註】：由算幾不等式可得$1=a^3+b^3+3ab\ge ab(a+b)+3ab\ge2ab\sqrt{ab}+3ab$；若令$x=\sqrt{ab}>0$，則前式等價於

$2x^3+3x^2-1\le0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)^2\le0 \Leftrightarrow 2x-1\le0 \Leftrightarrow x\le\frac{1}{2}$．

因此，$ab=x^2\le\frac{1}{4}$．所以既使不知道$a+b=1$，亦能證明$ab\le\frac{1}{4}$．

【問題三】：試求所有的正整數n，使得$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$為一完全平方數.

【參考解答】：首先,我們可將$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$因式分解為

$$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1=(n+1)(n^4+n^3+n^2+n+1).$$

由於$n+1$與$n^4+n^3+n^2+n+1$互質，所以$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$為一完全平方數的充要條件為$n+1$與$n^4+n^3+n^2+n+1$均為完全平方數.

其次，對於任意的正整數n，

$$(n^2+\frac{n}{2})^2<n^4+n^3+n^2+n+1<(n^2+\frac{n}{2}+1)^2.$$

由於當n為偶數時，$n+\frac{n}{2}$與$n+\frac{n}{2}+1$為連續正整數，而$n^4+n^3+n^2+n+1$為一完全平方數.

所以，只有當n為奇數時，上式才有可能成立. 在此情形下，

$$n^4+n^3+n^2+n+1=(n^2+\frac{n-1}{2}+1)^2,$$

由此可得，$n=-1$(不合)，$n=3$. 故，僅在$n=3$時，可使得$n^4+n^3+n^2+n+1$為一完全平方數. 當$n=3$時，$n+1=4=2^2$也是一個完全平方數.

陸、口試試題及參考解答

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
口試程序表

時　間	紙筆作答 (M311)	口試 A(M407)	口試 B(M408)	獨立研究 (M310)
7:40~8:00	92M02			
8:00~8:20	92M05	92M02		
8:20~8:40	92M15	92M05	92M02	
8:40~9:00	92M17	92M15	92M05	
9:00~9:20	92M23	92M17	92M15	
9:20~9:40	92M26	92M23	92M17	
9:40~10:00	92M33	92M26	92M23	
	休息 10 分鐘	92M33	92M26	
10:10~10:30	92M52	休息 10 分鐘	92M33	
10:30~10:50	92M53	92M52	休息 10 分鐘	
10:50~11:10	92M11	92M53	92M52	
11:10~11:30	92M27	92M11	92M53	
11:30~11:50	92M35	92M27	92M11	
11:50~12:10	92M44	92M35	92M27	
12:10~12:30	午餐至 13:30	92M44	92M35	
12:30~12:50		午餐至 13:50	92M44	
			午餐至 14:10	
13:30~13:50	92M04			
13:50~14:10	92M08	92M04		
14:10~14:30	92M09	92M08	92M04	
14:30~14:50	92M20	92M09	92M08	
14:50~15:10	92M21	92M20	92M09	
	休息 10 分鐘	92M21	92M20	
15:20~15:40	92M29	休息 10 分鐘	92M21	
15:40~16:00	92M25	92M29	休息 10 分鐘	
16:00~16:20	92M24	92M25	92M29	
16:20~16:40	92M30	92M24	92M25	
16:40~17:00	92M46	92M30	92M24	
17:00~17:20		92M46	92M30	
17:20~17:40			92M46	

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口 試 評 分 表（A組）

學生編號	口試題一答題概況	口試題二答題概況	評 分

口試評審委員：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口 試 評 分 表 (B組)

學生編號	筆試一答題概況	筆試二答題概況	評 分

口試評審委員：_____

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口 試 成 績 表（A 組）

學生編號	成 績	學生編號	成 績	學生編號	成 績
1		9		17	
2		10		18	
3		11		19	
4		12		20	
5		13		21	
6		14		22	
7		15		23	
8		16		24	

口試委員：_____

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口 試 成 績 表 (B組)

學生編號	成 績	學生編號	成 績	學生編號	成 績
1		9		17	
2		10		18	
3		11		19	
4		12		20	
5		13		21	
6		14		22	
7		15		23	
8		16		24	

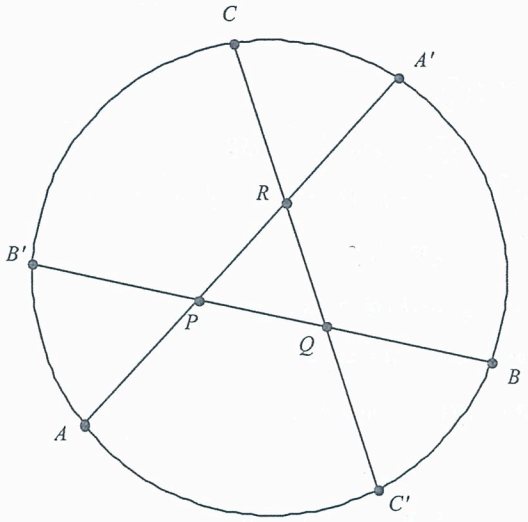
口試委員：_____

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
口試試題

【問題一】：如圖所示，圓中的三弦 $\overline{AA'}$ 、$\overline{BB'}$ 、$\overline{CC'}$ 兩兩相交，其交點分別為 P 、Q 、R .

已知 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}$ 且 $\overline{A'R}=\overline{B'P}=\overline{C'Q}$.

試證：ΔABC 為正三角形.



【問題二】：用 1, 2, 3, 4, 5 排出 120 個各位數均相異的五位數，將它們由小到大排列如下：

12345,　　12354,　　12435, ……　, 54321

第 1 個　　第 2 個　　第 3 個　　第 120 個

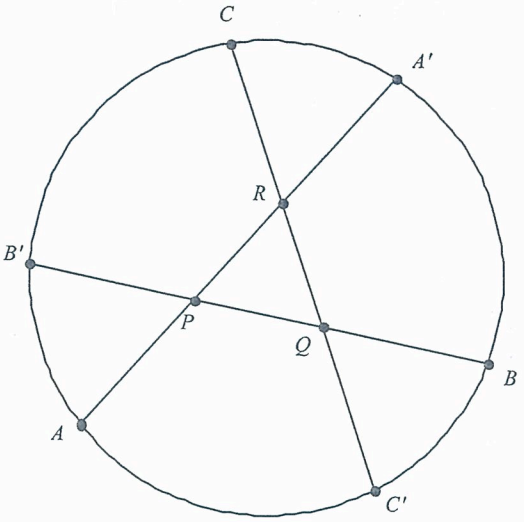
試問 34521 是排在第幾個？ 第 100 個數為何？

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
口試題參考解答

【問題一】：如圖所示，圓中的三弦 $\overline{AA'}$ 、$\overline{BB'}$ 、$\overline{CC'}$ 兩兩相交，其交點分別為 P 、Q 、R.

已知 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}$ 且 $\overline{A'R}=\overline{B'P}=\overline{C'Q}$.

試證：ΔABC 為正三角形.



【參考解答】：

設 $\overline{PQ}=r$，$\overline{QR}=p$，$\overline{RP}=q$；

$\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=m$ 且 $\overline{A'R}=\overline{B'P}=\overline{C'Q}=n$，

則由圓冪定理可得

$n(m+q)=m(n+p)$，

$n(m+r)=m(n+q)$，

$n(m+p)=m(n+r)$.

由此可得

$nq=mp$，$nr=mq$ 且 $np=mr$，

所以，$m=n$.因而，$p=q=r$，即 ΔPQR 為正三角形. 因此，$\Delta A'CR$，$\Delta B'AP$，$\Delta C'BQ$ 均為正三角形. 故，ΔABC 為正三角形.

【問題二】：用 1, 2, 3, 4, 5 排出 120 個各位數均相異的五位數，將它們由小到大排列如下：

12345, 12354, 12435, …… , 54321

第 1 個　第 2 個　第 3 個　第 120 個

試問 34521 是排在第幾個？ 第 100 個數為何？

【參考解答】：萬位數排 1, 2 的數各有 4!個，萬位數排 3 千位數排 1, 2 的數各有 3!個，萬位數排 3 千位數排 4 百位數排 1, 2 的數各有 2!個，萬位數排 3 千位數排 4 百位數排 5 的數依序有 34512 及 34521 兩數. 故，34521 是排在第 $2\times4!+2\times3!+2\times2!+1+1=66$，所以 34521 是排在第 66 個. 同理，萬位數是 1, 2, 3, 4 的五位數有 $4\times4!=96$ 個，所以第 100 個數是 51342.

柒、獨立研究試題及參考解答

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（一）試題

注意事項：

(16) 時間分配：2 小時。

(17) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(18) 不可使用電算器。

(19) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：試求滿足

$$(x+93)P(x-93)+(x-93)P(x+93)=2xP(x)$$

的實係數多項式 $P(x)$。

【問題二】： 設 x, y, z, w 都是正實數. 試證：

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w)\geq(1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}).$$

【問題三】：在 ΔABC 中，$\angle B$ 是直角，其內切圓與 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 分別交於點 D、E、F. 直線 EF 與直線 BC 交於點 G；過 E 引 $\overline{EF}$ 的垂線交 $\overline{BC}$ 於點 H. 設 ΔGHE 的外接圓與 $\overline{AB}$ 交於點 K. 試證：$\overline{GK}=\overline{GD}$.

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（一）參考解答

【問題一】：試求滿足

$$(x+93)P(x-93)+(x-93)P(x+93)=2xP(x) \qquad (1)$$

的實係數多項式 $P(x)$。

【參考解答】：取 $x=-93$ 代入(1)式可得

$$0\cdot P(-186)-186\cdot P(0)=-186\cdot P(-93),$$

由此可得 $P(0)=P(-93)$；取 $x=93$ 代入(1)式可得

$$186\cdot P(0)+0\cdot P(186)=186\cdot P(93),$$

由此可得 $P(0)=P(93)$；所以 $P(0)=P(93)=P(-93)$. 設 $P(0)=P(93)=P(-93)=c$，則 $P(x)=c$ 有三個根 $-93, 0, 93$，因而存在實係數多項式 $Q(x)$ 使得 $P(x)$ 可以表示為

$$P(x)=x(x-93)(x+93)Q(x)+c. \qquad (2)$$

將此代入(1)式化簡，除以 $x(x-93)(x+93)$ 後可得

$$(x-186)Q(x-93)+(x+186)Q(x+93)=2xQ(x). \qquad (3)$$

因為(3)式對於所有的實數 $x\neq -93, 0, 93$ 都成立，且 $Q(x)$ 為多項式，所以(3)式對於所有的實數 x 都成立. 若 $Q(x)\equiv a$ 是一常數多項式函數，則(3)式可表示為

$$a(x-186)+a(x+186)=2ax;$$

此顯然成立；因而

$$P(x)=ax(x-93)(x+93)+c=ax^3-8649ax+c$$

也滿足(1)式.

現在我們僅需證明：$Q(x)\equiv a$ 是一常數多項式. 記 $Q(186)=Q(93\times 2)=a$. 以 $x=186=93\times 2$ 代入(3)式，我們可得

$$0\times Q(93)+(93\times 4)\times Q(93\times 3)=(93\times 4)\times Q(93\times 2),$$

由此可得

$$Q(93\times 3)=Q(93\times 2)=a.$$

以 $x=279=93\times 3$ 代入(3)式，我們可得

$$93\times Q(186)+(93\times 5)\times Q(93\times 4)=(93\times 6)\times Q(93\times 3),$$

由此可得 $93\times a+(93\times 5)\times Q(93\times 4)=(93\times 6)\times a$，因而 $Q(93\times 4)=a$. 事實上，由數學歸納法可證：對於所有的正整數 $n\geq 2$，$Q(93\times n)=a$. 所以 $Q(x)\equiv a$，因而

$$P(x)=ax^3-8649ax+c,$$

其中 a, c 可以是任意的實數.

【問題二】： 設 x, y, z, w 都是正實數. 試證：

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}).$$

【參考解答】：利用算幾不等式 $(a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc})$，得

$$\begin{aligned}(1+x)(1+y)(1+z) &= 1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz \\ &\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{(xyz)^2}+xyz \\ &= (1+\sqrt[3]{xyz})^3.\end{aligned}$$

同理可得，

$$(1+y)(1+z)(1+w) = (1+\sqrt[3]{yzw})^3,$$
$$(1+z)(1+w)(1+x) = (1+\sqrt[3]{zwx})^3,$$
$$(1+w)(1+x)(1+y) = (1+\sqrt[3]{wxy})^3.$$

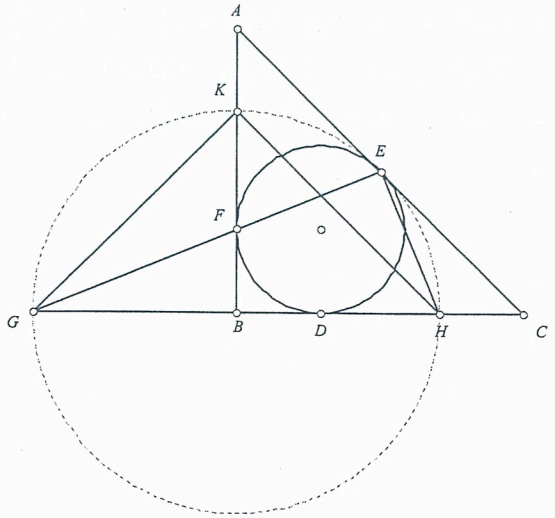
將上面四個不等式相乘、化簡後可得

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}),$$

其中等號成立的充要條件為 $x=y=z=w$.

【問題三】：在 ΔABC 中，$\angle B$ 是直角，其內切圓與 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 分別交於點 D、E、F. 直線 EF 與直線 BC 交於點 G；過 E 引 $\overline{EF}$ 的垂線交 $\overline{BC}$ 於點 H. 設 ΔGHE 的外接圓與 $\overline{AB}$ 交於點 K. 試證：$\overline{GK}=\overline{GD}$.

【參考解答】：



如圖所示，由切割線定理得 $\overline{GD}^2 = \overline{GF}\cdot\overline{GE}$. 又 $\angle B$ 與 $\angle FEH$ 均為直角，ΔGHE 與 ΔGFB 相似，所以 $\overline{GE}:\overline{GB}=\overline{GH}:\overline{GF}$，即 $\overline{GF}\cdot\overline{GE}=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$，因而得 $\overline{GD}^2=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$. 另方面，因 G、H、E、K 四點共圓，且 $\angle FEH$ 為直角，得 $\angle GKH$ 為直角. 故，ΔGKH 與 ΔGKB 相似. 因此，$\overline{GH}:\overline{GK}=\overline{GK}:\overline{GB}$，即 $\overline{GK}^2=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$. 綜合以上結果可得 $\overline{GK}^2=\overline{GD}^2$. 故，$\overline{GK}=\overline{GD}$.

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（二）試題

注意事項：

(20) 時間分配：2 小時。

(21) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(22) 不可使用電算器。

(23) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：設多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，其中 $a\geq 0$，$b\geq 0$，且 $f(x)=0$ 的三根都是實數. 試證：$f(2)\geq 27$.

【問題二】：試求所有的整數 m，n，滿足方程式 $3n^3-m^2+18n-6m-30=0$.

【問題三】：每一個由正整數所形成的集合都有一個「**交錯和**」，它的定義如下：「將此集合中的數，由大到小排列，交錯的加、減得到一個結果，稱為此集合的**交錯和**」. 例如：集合 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交錯和為 $9-6+4-2+1=6$；集合 $\{6\}$ 的交錯和為 6；空集合的交錯和視為 0. 試求 $\{1,2,\cdots,2004\}$ 所有子集合交錯和的總和.

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（二）參考解答

【問題一】：設多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，其中 $a\geq 0$，$b\geq 0$，且 $f(x)=0$ 的三根都是實數. 試證：$f(2)\geq 27$.

【參考解答】：因為 $f(x)$ 的係數都為非負，所以 $f(x)=0$ 的三根都是負實數，設為 $-r_1$，$-r_2$，$-r_3$. 由根與係數的關係可知

$$\begin{cases} a=r_1+r_2+r_3; \\ b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1; \\ 1=r_1r_2r_3. \end{cases}$$

由算幾不等式可得，

$$\frac{a}{3}=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}\geq \sqrt[3]{r_1r_2r_3}=1,$$

$$\frac{b}{3}=\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{3}\geq \sqrt[3]{r_1^2r_2^2r_3^2}=1,$$

因而，$a\geq 3$ 且 $b\geq 3$. 由此可得

$$\begin{aligned} f(2)&=2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2^1+1 \\ &\geq 2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2^1+1 \\ &=(2+1)^3 \\ &=27. \end{aligned}$$

【問題二】：試求所有的整數 m，n，滿足方程式 $3n^3-m^2+18n-6m-30=0$.

【參考解答】：

$3n^3-m^2+18n-6m-30=0$ 有整數解

$\Leftrightarrow m^2+6m-(3n^3+18n-30)=0$ 有整數解.

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+4(3n^3+18n-30)}}{2}$ 為整數，$36+4(3n^3+18n-30)\geq 0$

且 $36+4(3n^3+18n-30)=2^2\cdot 3\cdot(n^3+6n-7)$ 為完全平方數.

$\Rightarrow n^3+6n-7\geq 0$ 且 n^3+6n-7 為 3 的倍數.

$\Leftrightarrow n^3-1\geq 0$ 且 n^3-1 為 3 的倍數.

為此我們可設 $n=3k+1$，其中 k 為整數. 由於

$$3n^3+18n-21=3^4k(k^2+k+1),$$

所以 $k(k^2+k+1)$ 為一完全平方數. 若 $k\neq 0$，則 k 與 k^2+k+1 互質. 因為 k^2+k+1 恆為正，得 k 與 k^2+k+1 均為完全平方數. 令 $k^2+k+1=t^2$，其中 t 為正整數，則 $k^2<k^2+k+1=t^2<(k+1)^2$，而得 $k<t<k+1$ 之矛盾結果. 故 $k=0$，即 $n=1$. 當 $n=1$ 時，$3n^3+18n-21=0$ 為完全平方數. 此時，$m=-3$.

【問題三】：每一個由正整數所形成的集合都有一個「**交錯和**」，它的定義如下：「將此集合中的數，由大到小排列，交錯的加、減得到一個結果，稱為此集合的**交錯和**」．例如：集合$\{1,2,4,6,9\}$的交錯和為$9-6+4-2+1=6$；集合$\{6\}$的交錯和為 6；空集合的交錯和視為 0．試求$\{1,2,\cdots,2004\}$所有子集合交錯和的總和．

【參考解答】：將$\{1,2,\cdots,2004\}$所有子集合分成2^{2003}組 S 及$S\cup\{2004\}$，其中S為$\{1,2,\cdots,2003\}$的子集合，則這兩個子集合交錯和的總和為 2004．所以$\{1,2,\cdots,2004\}$所有子集合交錯和的總和為2004×2^{2003}．

捌、九十二學年度各分區數學能力競賽筆試試題及參考解答

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第一區(花蓮高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n(n\geq 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。證明她的領海面積是

$$(p+\pi d)d.$$

有兩個問題要問你：

(1) 請你完成這問題的證明。(8 分)

(2) 如果有一個島嶼的形狀恰為圓形，且海岸線總長也是 p，那麼這島嶼的領海面積比凸 n 邊形島國的領海面積大、相等或小呢？請你先猜答案，再實際計算是否猜對。(8 分)

【問題二】：設 $a<b$。函數 $f(x)=4+2x-x^2$ 在區間 $[a,b]$ 上的最小值為 $2a$，最大值為 $2b$，求 a, b 之值。(16 分)

【問題三】：在一容器內裝有濃度 10%的溶液 100 公克，注入濃度為 40%的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 a_n %代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 a_0%=10%(溶液初始濃度)。

(1) 求 a_1 的值。(3 分)

(2) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。(5 分)

(3) 求 a_n 的一般公式。(9 分)

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

北區 第一區(花蓮高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)配分：滿分 21 分，每題 3.5 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1.用 0、1、...、9 中的三相異數字，拼成一個三位數再除以此三個數的和，試問所得的數值中最小的是____（一）____。

2.某次桌球單打比賽中，原訂每兩位球員恰比賽一場，但有四位球員各比賽了兩場後就退出了，這樣全部比賽只進行了 50 場，則這四位選手之間總共賽了____（二）____場。

3.設圓 $x^2+(y-a)^2=1$ 與拋物線 $y=2x^2$ 相切，則 a 的值為____（三）____。

4.福爾摩斯在偵辦一件兇殺案，案發時間據判斷是在半夜十二點至凌晨三點之間，福爾摩斯想從案發現場拾獲的一只手錶準確研判兇殺時間。據判斷，此手錶在案發時，因為經過劇烈的打鬥而損壞停止，指針僅剩下時針，而刻度也僅剩下 12，其他刻度皆已脫落。

福爾摩斯拿隨身攜帶的尺量了一下，時針的長度是 0.5 公分，並順手拿鉛筆在錶的中心沿 12 點的方向 0.8 公分處點一個黑點，再量此黑點與時針的頂點的距離是 0.7 公分。福爾摩斯在草稿紙上算了一下，微笑的說：「我知道精確的案發時間了。」問：案發的時間是凌晨幾時幾分？ 答：(四)。

5.下圖是矩形內接一半圓形，且半圓圓弧與矩形的邊相切，則此半圓形的半徑為(五)。

6.標準身材的定義是

$$\frac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}}=\frac{\text{肚臍距頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}$$

有一身高 152 公分，肚臍高度 92 公分的女孩欲借穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度，滿足標準身材的定義。試問：該女孩穿多少公分（取最接近的整數）的高跟鞋較恰當。 答：____（六）____。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第二區(板橋高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)配分：滿分 49 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：試求滿足下列條件的所有正整數 n ：

（1）n 恰有 6 個正因數：$1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$ ；

（2）$1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$ 。（16 分）

【問題二】：從 1 到 100 的整數中挑選相異的數形成 n 個集合，滿足下列兩個條件：

（1）任何兩個集合都沒有共同的元素；

（2）每個集合中最大元素等於其餘各元素的乘積。

試問：n 最大是多少？並寫出這 n 個集合。（需說明理由）（16 分）

【問題三】：在凸五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$ ，而且 $\overline{CD}$ 的中點 M 滿足 $\angle CMB=\angle DME=45°$ 。試求

（1）$\angle ABC$ 的度數；（9 分）

（2）$\overline{CF}:\overline{CM}$ ，其中 F 是 B 至直線 CD 的垂足。（8 分）

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

北區 第二區(板橋高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)配分：滿分 21 分，每題 3 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1.設 ΔABC 中 $\angle B=2\angle C$，$\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，使得 $\overline{AB}=\overline{CD}$，則 $\angle A=$ ____(一)____。

2.平面上的格子點到直線 $15x+20y-12=0$ 的最短距離為 ____(二)____。(格子點是指兩個坐標都是整數的點)

3.設 a,b 為正整數且 $a\geq b$，滿足 $ab+a+b=181$ 及 $a^2b+ab^2=3900$。求 $a^2-b^2=$ ____(三)____。

4.坐標平面上有三個圓 A、B 與 C。圓 A 的圓心為 $(0,a)$ 而半徑為 a，圓 B 與圓 A 外切且與 x 軸相切於點 $(a,0)$，圓 C 與圓 A、圓 B 都外切且又與 x 軸相切，則圓 C 與 x 軸切點的 x 坐標為 ____(四)____。

5.若 x 是正數，且 $x\neq 4$，$x\neq\frac{1}{9}$，則 $\frac{4}{4-x}+\frac{9x}{9x-1}$ 的最小值為 ____(五)____。

6.設 a 是實數，方程式 $x^4-(3+2a)x^2+2x+a^2+2a=0$ 的根都是實根，則 a 的範圍為 ____(六)____。

7.以下是一個猜數字遊戲：甲由 0 到 9 的十個數字中任選四個相異數字排成一列(例如 0923)，讓乙猜此數。若數字與位置都對者有 n 個，記為'nA'；若數字對而位置不對者有 m 個，記為'mB'。例如：依上面數字，若乙猜'1935'，則甲記'1A 1B'；若乙猜'1983'則甲記'2A 0B'。

若乙第一次猜的結果是'1A 1B'，則乙第二次就猜對此數的機率為 ____(七)____。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第三區(建國中學)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)配分：滿分 49 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[**問題一**]：已知一元二次方程式$ax^2-2bx+2c=0$有兩個相異實根都介於 2 與 3 之間，又$a>0$。試證下述兩個不等式成立：

(1) $b<c<\frac{3}{2}a+b$。(6 分)

(2) $\frac{3a}{4a+2c}+\frac{b}{2a+b}>\frac{c}{b+c}$。(6 分)

[**問題二**]：給定一銳角三角形$\triangle ABC$，其中$\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$。設$\overline{AM}$與$\overline{BN}$分別表示$\triangle ABC$過頂點 A 與 B 的高，而 D 與 E 分別爲射線$\overrightarrow{MA}$與$\overrightarrow{NB}$上滿足$\overline{MD}=\overline{MB}$與$\overline{NE}=\overline{NA}$的兩點。試證：$\overline{DE}$與$\overline{MN}$平行。(12 分)

[**問題三**]：試求出能使n^4+4^n爲質數的所有正整數 n。(12 分)

[**問題四**]：有多少個多項式$f(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$同時滿足下面兩個條件？(13 分)

(1) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7是集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中的七個相異元素；

(2) $f(x)$可被x^3+x^2+x+1整除。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

北區 第三區(建國中學)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)配分：滿分 21 分，每題 3 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1. 對每個大於 1 的正整數 n，令

$$T_n = 1+2+3+\cdots+n\ ,\quad P_n = \frac{T_2}{T_2-1}\times\frac{T_3}{T_3-1}\times\cdots\times\frac{T_n}{T_n-1}\ ,$$

則 $P_{2003}=$ ___(1)___ 。(以最簡分數表示)

2. 設正整數 m 與 n 滿足 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$ 。若 n 是奇數，則所有可能的正整數序對 (m,n) 爲 ___(2)___ 。

3. 已知拋物線 $y=x^2+3x-1$ 上有兩相異點對直線 $x+y=0$ 成對稱，則此兩相異點的坐標爲 ___(3)___ 。

4. 設 $f(x)$ 表示實數 x 的小數部分 (例如：$f(2.38)=0.38$ ，$f(5)=0$)，則

$$f(\frac{4\times1}{2003})+f(\frac{4\times2}{2003})+f(\frac{4\times3}{2003})+\cdots+f(\frac{4\times2003}{2003})$$

之值等於 ___(4)___ 。

5. 有一張邊長爲 6 公分的正三角形紙片 ABC，設 P 點在 $\overline{AB}$ 上而 Q 點在 $\overline{AC}$ 上。若將紙片 ABC 沿 $\overline{PQ}$ 對摺，恰好能使頂點 A 與 $\overline{BC}$ 的一個三等分點 A' 重合，則 $\overline{PQ}$ 的長爲 ___(5)___ 公分。

6. 在坐標平面上，令 S 表示集合 $\{(x,y)\,|\,x,y\in N, 1\le x\le 4, 1\le y\le 5\}$，則以集合 S 中的點做爲頂點的正方形共有 ___(6)___ 個。

7. 若 $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{5x-6}=\sqrt[3]{2x-4}+\sqrt[3]{4x-5}$ ，則 x 的所有可能值爲 ___(7)___ 。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第四區(新竹高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)配分：滿分 49 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：在坐標平面上給定一點 $A(2,5)$，試在直線 $y=x$ 上找一點 P，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

[問題二] ：試求出所有的正整數 a、b，使得 $\frac{a^2+b}{ab+1}$ 為正整數。

[問題三]： 將 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 為 $1, 2, 3, \cdots, 48$ 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的 16 個數中是偶數的個數。

(a) 試證：$f(1)\ f(2)\cdots f(48) \leqq 2^{144}$；

(b) 試證：必有一整數 $k \in \{1, 2, 3, \cdots, 48\}$ 使得 $f(k) = 8$.

十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

北區 第四區(新竹高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)配分：滿分 21 分，每題 3.5 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1. 設有兩圓內切，通過小圓的圓心作一直線 A-B-C-D，分別交大圓於 A、D，交小圓 B、C，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=2:6:5$，則小圓與大圓半徑的比值為 ___(1)___。

2. 已知函數 f 滿足：$f(14)=14$, $f(26)=26$，且當質數 p 與 q 滿足 $p>q\geqq 2$ 時，$f(pq)=f(p)-f(q)+p+q$。則 $f(91)=$ ___(2)___。

3. 在△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上的中點，△ABD 的內切圓與中線 AD 相切於 M，△ACD 的內切圓與中線 AD 相切於 N。若 $\overline{AB}=15$, $\overline{AC}=10$，則線段 $\overline{MN}=$ ___(3)___。

4. 平面上過點 (3,0) 且與橢圓 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相切的兩條直線所夾成的銳角為 θ。則 $\tan\theta=$ ___(4)___。

5. 設正數 a, b 滿足 $2ab+3a+6b=27$，則 a^2+4b^2 的最小值為 ___(5)___。

6. 設 $f(x)$ 為有理係數的三次多項式，$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$，且對任意正整數 n，$f(n)$ 都是正整數。則 $f(10)$ 的最小可能值為___(6)___。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(台中一中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)配分：滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 13 分，第三題 12 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

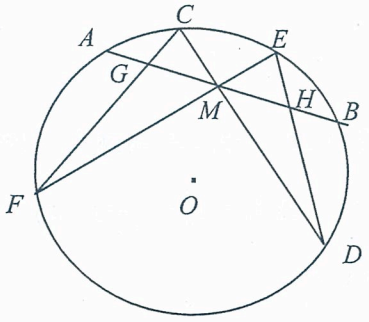
(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：設函數 F 之定義域為 $\mathbb{R}$ 上除了 $x=0$ 及 $x=1$。求滿足下列條件之 $F(x)$：

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x\ 。$$

[問題二]：已知 O 為圓心，M 為弦 $\overline{AB}$ 之中點，過 M 作兩弦 $\overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$；連接 $\overline{CF},\overline{DE}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 G,H，求證 $\overline{MG}=\overline{MH}$。



[問題三]：證明對於任意自然數 n，存在一個自然數 k 使得 $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$。

[問題四]：令 Q^+ 表正有理數集，N 表自然數集，定義 $f:N\to Q^+$ 如下：

$$f(1)=1,\ \ f(2n)=f(n)+1,\ \ f(2n+1)=\frac{1}{f(2n)}\ 。$$

(a) 求證若 $f(x)=f(y)$ 則 $x=y$。

(b) 求證對任意 $q\in Q^+$ 必存在一個自然數 n，使得 $f(n)=q$。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(台中一中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)本試卷共四題，二題填充題，二題計算證明題，滿分為 21 分，第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 6 分，第四題 5 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

填充題：

1. 若 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$，求 $a+b+c=$_____。

2. 若 $0<u<\sqrt{2}$ 及 $v>0$，則 $(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$ 之最小值=_____。

計算證明題：

3. 設 S 是一集合，且 $\circ$ 是定義於 S 上並具封閉性的運算：即若 $x,y\in S$，則 $x\circ y\in S$。現在若對任意 $x,y,z\in S$，有 $x\circ x=x$ 且 $(x\circ y)\circ z=(y\circ z)\circ x$。。求證：

   (a) 對所有 $x,y\in S$，$x\circ y\in y\circ x$。

   (b) 對所有 $x,y,z\in S$，$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$。

4. 令 n 是自然數，$T(n)$ 表示以 n 根牙籤圍出的三角形個數。試證：

   (a) 當 n 是偶數時，不可能有邊長 1 且周長為 n 的三角形。

   (b) 當 $n>3$ 時，$T(2n)<T(2n-1)$。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(嘉義高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)本試卷共四題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 13 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：試證 $\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{a(j)}<2\sqrt{n}$，其中 $a(j)$ 為與 $\sqrt{j}$ 最接近之整數。

[問題二]：已知 a,b,c 皆為正實數，且 $abc=1$，試證 $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geq\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$ 等號何時成立？（說明你的理由）

[問題三]：兩圓 C_1 及 C_2 的圓心分別為 O_1,O_2，這兩圓交於兩點 A,B，兩圓之公切線為 L_1,L_2,L_1 分別交圓 C_1,C_2 於 P_1,P_2 兩點，L_2 分別交圓 C_1,C_2 於 Q_1,Q_2 兩點。試證 AB 平分線段 P_1P_2 及 Q_1Q_2。

[問題四]：有 10 個人至新竹的果園採柿子。已知每人至少採 1 個，至多不超過 80 個。證明必定可以從這 10 人當中挑出甲乙兩群不同的人（即甲乙兩群之交集為空集合），使得甲群所採之柿子之總數和乙群相同。（註：甲乙兩群總人數並不一定為 10）

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(嘉義高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)本試卷共五題，滿分 21 分，第一題 4 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，第五題 5 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1. 如果定義在實數上的函數 $f(x)=7x-4|x|$ 有反函數，求其反函數。若無，請解釋。

2. 設 $f(x,y)=\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}y,\sqrt{2}x+\sqrt{2}y\right)$ 為定義在實數平面上的函數，且 $A=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$。令 $B=\left\{f(x,y)\middle|(x,y)\in A\right\}$，求 B 所涵蓋的面積。

3. 若 $f(t)=\dfrac{1+\sin t}{3+2\cos t}$，其中 t 為實數，求 $f(t)$ 的最大值。

4. 若 a,b 為整數，則 $\dfrac{a}{299}+\dfrac{b}{481}$ 的最小正值。

5. 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為定義於實數上的函數。已知 $g(x)>0$，$f(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)+2}$ 和 $g(x)g(1-x)=4$ 對所有實數 x 皆成立。求 $f\left(\dfrac{1}{2004}\right)+f\left(\dfrac{2}{2004}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2003}{2004}\right)$ 的值。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(台南一中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)本試卷共四題，滿分 49 分，第一題 13 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：投擲一枚公正的錢幣 2n 次，證明出現正面的次數至少為 n 次的機率為

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\binom{2n}{n}$$

[問題二]：請問對於所有的實數 x，$\sin(\cos x), \cos(\sin x)$ 哪一個大？(請詳細證明)

[問題三]：設 p(x)為整係數多項式，且滿足 $p(m_1)=p(m_2)=p(m_3)=p(m_4)=13$。這裡 m_1，m_2，m_3，m_4 是給定相異整數。證明沒有整數 m，使 p(m)=20。

[問題四]：設 f(0)=0，f(1)=1，f(2)=2 且對任一正整數 n 都有 f(3n)=f(n)，f(3n+1)=f(n)+1，f(3n+2)=f(n)-1，試求 f(3721)之值。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(台南一中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)本試卷共四題，滿分 21 分，第一題 5 分，第二題 6 分，第三題 5 分，第四題 5 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1.請詳細說明下列這兩個數

$$(1.0000001)^{10000000}\ ,\ 2$$

哪一個大？

2.設α為接近於$\sqrt{2}$之正有理數且$\beta=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$。

(1)試證$\sqrt{2}$介於α與β之間。

(2)α與β二數何者較接近$\sqrt{2}$？為什麼？

3.令 $P(z)=200z^5+201z^4+202z^3+203z^2+204z+205$ $\forall z\in\mathbf{C}$。證明：$P(z)=0$ 在 $\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 中沒有任何解，其中 $\mathbf{C}$ 表所有複數。

4.對所有大於 1 的整數 n，設 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n$ 且 $T_n=\frac{s_2}{s_2-1}\cdot\frac{s_3}{s_3-1}\cdot\frac{s_4}{s_4-1}\cdots\frac{s_n}{s_n-1}$，試求 T_{2003} 之值。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(高雄中學)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)本試卷共四題，滿分 100 分，第一題 25 分，第二題 25 分，第三題 25 分，第四題 25 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：m,n 為正整數；試證該兩數的乘積 mn 為偶數的充要條件為存在二非負整數 p,q 使得 $m^2+n^2+p^2=q^2$。

[問題二]：設集合 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$，在這 100 個數中，先將這些數中是 2 的倍數乘以 i，其中 $i=\sqrt{-1}$；之後，再將這些數中是 3 的倍數及虛部是 3 的倍數的複數乘以 i；現在從經過上述兩次處理後的 100 個數中任意挑選 3 個相異的數，並將這 3 個數加起來令其和為 a_k。試求所有這種 3 個相異數和 a_k 的總和。

[問題三]：設 n 為正整數，若數字 1 有 $5n+1$ 個，數字 2 有 n 個，數字 3 有 n 個；今將這 $7n+1$ 個數字排成一排，試證：一定可以在所排成一排的數字中找到一個數字 1，使得該數字 1 左邊所有數字 1 的總和等於左邊其他數字的總和。

（當然，在此特定數字 1 的右邊也有此性質）

[問題四]：設三角形 ABC 為銳角三角形，其中 $\overline{AB}>\overline{AC}$，今從三頂點 A,B,C 所作 ΔABC 的三高在其對邊的垂足分別為 D,E,F；過 D 作 $\overline{EF}$ 的平行線，分別交直線 AB 於 Q 和 R；而直線 EF 交直線 BC 於 P。試證 ΔPQR 的外接圓通過線段 $\overline{BC}$ 的中點。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(高雄中學)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)本試卷共五題，滿分 100 分，第一題 20 分，第二題 20 分，第三題(a)10 分(b)10 分，第四題 20 分，第五題(a)10 分(b)10 分。

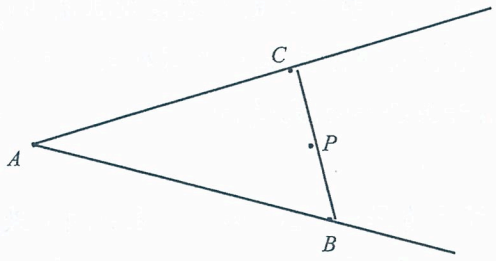
(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1. 一函數 $f:N\to R$，已知 $f(1)=1$，$f(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}[(k+2)f(k)+k+1]$，$n>1$；試求 $f(100)=?$

2. 在 $\angle A$ 內有一個固定點 P，自 P 點任意作一直線交 $\angle A$ 兩邊於 B 點與 C 點。試求 $\frac{AB}{BP}+\frac{AC}{CP}$ 的最大值。



3. (a) 試求 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$ 之值。

(b) 試問方程式 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=2003$ 有多少組不同的正整數解？

4. 甲乙丙三人分別帶著他們的妻子方女士、吳女士及曾女士到百貨公司購物；如果用 A,B,C 表示三位女士，至於 A 是誰，B 是誰，C 是誰，目前尚不知道。已知他們 6 人，每人花在買商品的金額等於所購商品件數的平方；而且每位丈夫比自己的妻子多花 48 美元，若乙比 C 多買 7 件，丙比 B 多買 9 件；請問方女士、吳女士及曾女士分別是 A,B,C 中的哪一位？

5. (a) 若 a,b 是正整數，且滿足

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{4}{49}$$

試求 $a+b$ 之值。

(b) 試問 $20!=20\times19\times\cdots\times2\times1$ 乘開之後最後一個非零的數字為何？

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(屏東高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)本試卷共五題，滿分 100 分，第一題 10 分，第二題 15 分，第三題 15 分，第四題 20 分，第五題 20 分，第六題 20 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：試求最小的質數 n，使得 $\frac{100!}{(n!)^2}$ 不為整數。

[問題二]：設 a_n 表示 3^n 的個位數字，試求 $a_1+a_2+\cdots+a_{2002}+a_{2003}$ 之值。

[問題三]：設 p,q,r 為介於 0 與 1 之間的三個實數，試證在 0 與 1 之間存在一個實數 x 使得 $\frac{1}{|x-p|}+\frac{1}{|x-q|}+\frac{1}{|x-r|}<20$

[問題四]：試求滿足方程式 $(y+1)^2=x^4+20x^3+104x^2+40x+2004$ 的所有整數解 (x,y)

[問題五]：直線 L 上有兩相異固定點 B 與 C，已知 B 與 C 相距 d 單位；直線 L 外有一平行線 M，兩線相距 h 單位；已知點 A 為直線 M 上的一點且 A 可以在直線 M 上自由移動。設 A,B,C 三點形成一個三角形 ABC。

(a) 試證：ΔABC 的內切圓面積最大時，則 ΔABC 是一個等腰三角形。

(b) 若 $d=6,h=4$，試求 ΔABC 的最大內切圓面積。

[問題六]：設 $a,b,c>0$，且 $abc=8$。試證：$\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a}\le\frac{1}{2}$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(屏東高中)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)本試卷共五題，滿分 100 分，第一題 20 分，第二題 20 分，第三題 20 分，第四題 20 分，第五題 20 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1. 已知 ΔABC 為圓 O 的內接正三角形，今在 ΔABC 內部任取一點 P 向三角形三邊作垂線，設圓 O 的半徑長為 r，P 到三邊所作垂直線段長分別為 u, v, w；問 u, v, w 可形成一個三角形的三邊之機率為何？

2. 設 C, O, D 為線段 $\overline{AB}$ 上之三點且四等分此線段 $\overline{AB}$，若以 $\overline{CD}$ 為直徑作一個半圓，並在此半圓的圓周上取一點 E 使得 ΔCDE 為一等腰三角形，試求 $\tan(\angle AEC + \angle BED)$ 之值。

3. 設 n 為整數，已知 $P(n) = n^3 - n^2 - 5n + 2$，試求所有正整數 n 滿足 $P(n)^2$ 為一個質數的完全平方數。

4. 試求方程式 $x^{\log_{10} x} = \dfrac{x^3}{100}$ 之所有解。

5. 設 $S = \{1, 2, 3, \cdots, 200\}$，如果將 S 中的 200 個數，凡是能被 2 所整除的數都乘以 (-1)，改成負數。之後，再將這些數中能被 3 所整除的數乘以 (-1)。接著，再將這些數中能被 5 所整除的數乘以 (-1)。經過這三次的修改後，問這 200 個數的總和是多少？

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第一區(花蓮高中)

【問題一】：考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n(n\geq 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。證明她的領海面積是

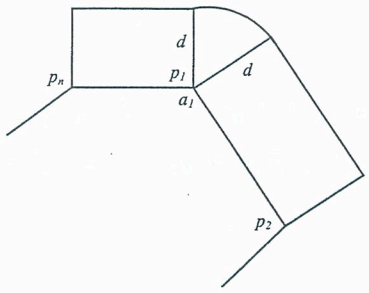
$$(p+\pi d)d.$$

有兩個問題要問你：

(3) 請你完成這問題的證明。

(4) 如果有一個島嶼的形狀恰為圓形，且海岸線總長也是 p，那麼這島嶼的領海面積比凸 n 邊形島國的領海面積大、相等或小呢？請你先猜答案，再實際計算是否猜對。

【參考解答】：(1)如下圖所示，令凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n$ 的 P_i 所對應的內角為 α_i。



領海是由 $P_1P_2,P_2P_3,\ldots,P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形及頂點 $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2,P_2P_3,\ldots,P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形面積和為

$$(P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_nP_1)d=pd.$$

頂點 $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積和為

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)\frac{\pi d^2}{2\pi}=(n\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n))\frac{\pi d^2}{2\pi}=(n\pi-(n-2)\pi)\frac{\pi d^2}{2\pi}=\pi d^2$$

【問題二】：設 $a<b$。函數 $f(x)=4+2x-x^2$ 在區間 $[a,b]$ 上的最小值為 $2a$，最大值為 $2b$，求 a,b 之值。(16 分)

【參考解答】：$f(x)=4+2x-x^2=5-(x-1)^2$

case 1. 當 $a<b<1$ 時，f 在 $[a,b]$ 上遞增　故最大值為 $f(b)=2b$，最小值為 $f(a)=2a$

即 $\begin{cases}4+2b-b^2=2b\\4+2a-a^2=2a\end{cases}$，

解之得 $a=-2,\ b=-2$ （不合）

case 2. 當 $a<1<b$ 時，f 在 $[a,b]$ 上的最大值為 $f(1)=5$　由已知 $5=2b$，$\therefore b=\frac{5}{2}$

$f(b)=f(\frac{5}{2})=5-(\frac{5}{2}-1)^2=5-\frac{9}{4}=\frac{11}{4}>2>2a$

故 f 之最小值發生於 $f(a)=2a$

$4+2a-a^2=2a$，$\therefore a=\pm 2$ （取 $a=-2$）故 $a=-2$，$b=\frac{5}{2}$

case 3. 當 $1<a<b$ 時，f 在 $[a,b]$ 上遞減　故最大值為 $f(a)=2b$，最小值為 $f(b)=2a$

即 $\begin{cases}4+2a-a^2=2b\\4+2b-b^2=2a\end{cases}$，

解之得 $a=2,\ b=2$ （不合）

解答為：$a=-2$，$b=\frac{5}{2}$

【問題三】：在一容器內裝有濃度 10%的溶液 100 公克，注入濃度為 40%的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 a_n %代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 a_0%=10%(溶液初始湛度)。

(4) 求 a_1 的值。(3 分)

(5) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。(5 分)

(6) 求 a_n 的一般公式。(9 分)

【參考解答】：

（1）根據題意

$$a_1\%=\frac{100\cdot a_0\%+25.40\%}{125}\Rightarrow a_1=16.$$

（2）根據題意

$$a_{n+1}\%=\frac{100\cdot a_n\%+25.40\%}{125}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+8$$

（3）將 $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+8$　整理成 $(a_{n+1}-40)=\frac{4}{5}(a_n-40).$

由此關係式得知，數列 (a_n-40) 是首項為 $a_1-40=16-40=-24$，公比 $\frac{4}{5}$ 的等比數列。故

$a_n-40=(a_1-40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

解得 $a_n=40+(a_1-40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

北區 第一區(花蓮高中)

1.【參考解答】：$\frac{189}{18}$(或$\frac{21}{2}$)。

2.【參考解答】：3。

3.【參考解答】：$\frac{17}{8}$或-1。

4.【參考解答】：二時 0 分。

5.【參考解答】：5。

6.【參考解答】：5。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第二區(板橋高中)

【問題一】：試求滿足下列條件的所有正整數 n：

（1）n 恰有 6 個正因數：$1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$；

（2）$1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$。（16 分）

【參考解答】：設正整數 n 滿足條件(1)、(2)且其質因數分解可表示爲 $p_n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots\cdots p_k^{a_k}$ 其中 $1 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_k$ 且 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是相異質數；則它的正因數共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots\cdots(\alpha_k+1)$ 個。

由條件(1)，則只可能是(i) k=1 且 $\alpha_1 = 5$；或(ii) k=2, $\alpha_1 = 1$ 且 $\alpha_2 = 2$。

若是情況(i)，則 $n = p^5$；且由條件(2)可得 $1+p^5 = 5(p+p^2+p^3+p^4) = 5p(1+p+p^2+p^3)$，此顯然不可能。

若是情況(ii)，則 $n = pq^2$，其中 p、q 爲相異質數。由條件(2)可得 $1+pq^2 = 5(p+q+pq+q^2)$；

所以，$p = 5 + \dfrac{30q+24}{q^2-5q-5}$ (a)

因爲 p 爲正整數，所以 $30q+24 \ge q^2-5q-5$。由此可得 $q \le 35$。滿足(a)且不大於 35 的質數 q 可使得 p 亦爲質數的只有 $q = 7$，而此時對應的 $p = 31$。故，$n = 31 \cdot 7^2 = 1519$。

【問題二】：從 1 到 100 的整數中挑選相異的數形成 n 個集合，滿足下列兩個條件：

（1）任何兩個集合都沒有共同的元素；

（2）每個集合中最大元素等於其餘各元素的乘積。

試問：n 最大是多少？並寫出這 n 個集合。（需說明理由）（16 分）

【參考解答】：由於每個集合中的元素均相異，且每個集合中最大的數等於其餘各數之積，所以每個集合至少含有 3 個數，且每個集合中最小的數不大於 9，否則此集合中除了最大的數，其餘各數的積不小於 $10\times11=110>100$，矛盾！因而集合的個數不大於 9。若存在 9 個滿足條件(1)、(2)的集合，則它們最小的元素分別爲 1, 2, ⋯, 9。

考慮包含 1 的集合，則此集合至少還包含其他 3 個相異的數，所以此集合中第二小的數大於 9，因而會導致此集合中最大的數大於 100，矛盾！故，滿足條件(1)、(2)的集合至多有 8 個。

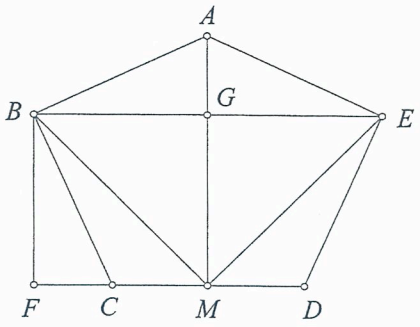
事實上，{2, 17, 34}, {3, 16, 48}, {4, 15, 60}, {5, 14, 70}, {6, 13, 78}, {7, 12, 84}, {8, 11, 88}, {9, 10, 90}爲 8 個滿足條件(1)、(2)的集合。

【問題三】：在凸五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$，而且 $\overline{CD}$ 的中點 M 滿足 $\angle CMB=\angle DME=45°$。試求

（1）$\angle ABC$ 的度數；（9 分）

（2）$\overline{CF}:\overline{CM}$，其中 F 是 B 至直線 CD 的垂足。（8 分）

【參考解答】：



(1)在等腰三角形△CDB 中，因爲 $\angle CDB<\angle CMB=45°$，所以 $\angle BCD>90°$。於是，△CMB(與△DME) 是鈍角三角形。依鈍角三角形的SSA 全等定理，可知△ $CMB\cong$△DME，$\overline{MB}=\overline{ME}$。於是，△$MBE$ 是直角等腰三角形，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 平行，$\overline{AM}$ 將 $\overline{BE}$ 垂直平分於G。若 B 至直線 CD 的垂足爲 F，則 $\overline{BF}=\overline{GM}=\overline{BG}$。依直角三角形的SSA 全等定理，可知△ $BCF\cong$△BAG。於是，$\angle FBC=\angle ABG$，$\angle ABC=\angle FBG=90°$。

(2)因爲 $\angle BMC=45°$，所以，在三角形△BMC 中引用餘弦定律，得

$$\overline{BM}^2-2\overline{BM}\cdot\overline{CM}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\overline{CM}^2=\overline{BC}^2\ ,$$

$$\overline{BM}^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}\cdot\overline{BM}-\frac{3}{4}\overline{AB}^2=0\ ,$$

$$\overline{BM}=\frac{1}{4}(\sqrt{2}\pm\sqrt{14})\,\overline{AB}\text{ (應取正號)。}$$

進一步得

$$\overline{CF}=\overline{FM}-\overline{CM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BM}-\frac{1}{2}\overline{AB}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{4}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\overline{AB},\quad \overline{CF}:\overline{CM}=(\sqrt{7}-1):2\ 。\ \|$$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

北區 第二區(板橋高中)

1. 【參考解答】：72° 。

2. 【參考解答】：$\frac{2}{25}$ 。

3. 【參考解答】：25。

4. 【參考解答】：$\frac{2}{3}a$ 或 $2a$

5. 【參考解答】：$\frac{12}{5}$

6. 【參考解答】：$a \geq \frac{-1}{4}$

7. 【參考解答】：$\frac{1}{6!}$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第三區(建國中學)

[問題一]：已知一元二次方程式$ax^2-2bx+2c=0$有兩個相異實根都介於 2 與 3 之間，又$a>0$。試證下述兩個不等式成立：

(1) $b<c<\frac{3}{2}a+b$。

(2) $\frac{3a}{4a+2c}+\frac{b}{2a+b}>\frac{c}{b+c}$。

【參考解答】：

(1) 設$ax^2-2bx+2c=0$的兩個實根爲x_1與x_2。依假設，$2<x_1<3$，$2<x_2<3$。依根與係數的關係，可得

$$x_1+x_2=\frac{2b}{a}\text{，}x_1x_2=\frac{2c}{a}\text{。}$$

因爲$2<x_1<3, 2<x_2<3$且$a>0$，所以，得

$$c-b=\frac{a}{2}(x_1x_2-x_1-x_2)=\frac{a}{2}[(x_1-1)(x_2-1)-1]>\frac{a}{2}(1\times1-1)=0\text{；}$$

$$\frac{3a}{2}+b-c=\frac{a}{2}(3+x_1+x_2-x_1x_2)=\frac{a}{2}[4-(x_1-1)(x_2-1)]>\frac{a}{2}(4-2\times2)=0\text{。}$$

由此可得

$$b<c<\frac{3}{2}a+b\text{。}$$

(2) 因爲$x_1>2, x_2>2$且$a>0$，所以，得$b>2a$。因爲$c>b$，所以，進一步得$c>2a$。

於是，可得

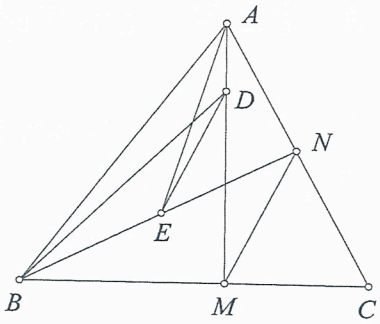
$$\frac{3a}{4a+2c}+\frac{b}{2a+b}>\frac{3a}{2b+2c}+\frac{b}{c+b}=\frac{\frac{3}{2}a+b}{b+c}>\frac{c}{b+c}\text{。}\quad\|$$

[問題二]：給定一銳角三角形$\triangle ABC$，其中$\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$。設$\overline{AM}$與$\overline{BN}$分別表示$\triangle ABC$過頂點 A 與 B 的高，而 D 與 E 分別爲射線$\overrightarrow{MA}$與$\overrightarrow{NB}$上滿足$\overline{MD}=\overline{MB}$與$\overline{NE}=\overline{NA}$的兩點。試證：$\overline{DE}$與$\overline{MN}$平行。

【參考解答】：因爲$\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$，所以點 D 與 E 都在$\triangle ABC$內部。

因爲 $\angle AMB = \angle ANB = 90^\circ$ ，所以 A 、 B 、 M 與 N 共圓。於是，得

$$\angle MAN = \angle MBN \ ， \ \angle ABN = \angle AMN \ 。$$



其次，因爲

$$\angle DAE = \angle NAE - \angle NAD = \angle 45^\circ - \angle MAN$$

$$= \angle 45^\circ - \angle MBN = \angle MBD - \angle MBE = \angle DBE \ ，$$

所以 A 、 B 、 E 與 D 共圓。於是，得 $\angle EDM = \angle ABE$ 。進一步得

$$\angle EDM = \angle ABE = \angle ABN = \angle AMN = \angle DMN \ 。$$

由此可知 $\overline{DE}$ 與 $\overline{MN}$ 平行。 ‖

[**問題三**]：試求出能使 $n^4 + 4^n$ 爲質數的所有正整數 n 。

【**參考解答**】：當 $n = 1$ 時， $n^4 + 4^n = 5$ 爲質數 。

當 n 爲偶數時，設 $n = 2k$ ，其中 $k \in N$ ，則

$$n^4 + 4^n = 16k^4 + 4^{2k} = 16(k^4 + 16^{k-1}) \ 。$$

此整數必是 16 的倍數，它不是質數。

當 n 爲比 1 大的奇數時，設 $n = 2k+1$ ，其中 $k \in N$ ，則

$$n^4 + 4^n = (2k+1)^4 + 4^{2k+1} = (2k+1)^4 + (2^{2k+1})^2$$

$$= [(2k+1)^2 + 2^{2k+1}]^2 - 2 \cdot 2^{2k+1}(2k+1)^2$$

$$= [(2k+1)^2 + 2^{2k+1}]^2 - [2^{k+1}(2k+1)]^2$$

$$= [(2k+1)^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}(2k+1)] \times [(2k+1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k+1)] \ 。$$

上式右端第一個因數顯然恆大於 1，只要證明第二個因數也恆大於 1，即可知 $n^4 + 4^n$ 不是質數。依算幾不等式可知

$$(2k+1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k+1) \geq 2\sqrt{(2k+1)^2 \times 2^{2k+1}} - 2^{k+1}(2k+1)$$

$$\geq 2^{k+1}(2k+1)\sqrt{2} - 2^{k+1}(2k+1)$$

$$= 2^{k+1}(2k+1)(\sqrt{2}-1)$$
$$\geq 4 \cdot 3 \cdot 0.4$$
$$\geq 4 \text{。} \quad \|$$

[**問題四**]：有多少個多項式 $f(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ 同時滿足下面兩個條件？

(1) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 中的七個相異元素；

(2) $f(x)$ 可被 $x^3 + x^2 + x + 1$ 整除。

【**參考解答**】：將 $f(x)$ 除以 $x^3 + x^2 + x + 1$，可得

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)[x^4 + (a_1 - 1)x^3 + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x + (a_4 - a_3 + 1)]$$
$$+ (a_5 - a_4 + a_1 - 1)x^2 + (a_6 - a_4 + a_2 - 1)x + (a_7 - a_4 + a_3 - 1) \text{。}$$

因爲 $f(x)$ 被 $x^3 + x^2 + x + 1$ 整除，所以，可得

$$1 + a_4 = a_1 + a_5 = a_2 + a_6 = a_3 + a_7 \text{。}$$

根據上述等式，我們必須從 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 中選出七個相異數，連同 1 共八個數，平分成四組，每一組的兩個數之和都相等，設和等於 k。因爲七個數相異，所以，a_1，a_2，a_3，a_5，a_6，a_7 等六個數都不等於 1。(例如：若 $a_1 = 1$，則 $a_4 = a_5$。)

a_4 也不等於 1，否則 $1 + a_4$ 比其他三組的和都小。由此可知：從 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 中選出的七個相異數不能含 1，因此其中的最大數至少爲 8，四組的共同和至少等於 9，亦即：$k = 9$、10 或 11。

(i) 當 $k = 9$ 時，$a_4 = 8$，而且另外三組數分別爲 $\{2, 7\}, \{3, 6\}$ 與 $\{4, 5\}$。其分配方法數共有 $6 \times 4 \times 2 = 48$ 種。(a_1 有 6 種選擇，a_2 有 4 種選擇，a_3 有 2 種選擇。)

(ii) 當 $k = 10$ 時，$a_4 = 9$，而且另外三組數分別爲 $\{2, 8\}, \{3, 7\}$ 與 $\{4, 6\}$。其分配方法數共有 $6 \times 4 \times 2 = 48$ 種。(a_1 有 6 種選擇，a_2 有 4 種選擇，a_3 有 2 種選擇。)

(iii) 當 $k = 11$ 時，$a_4 = 10$，而且另外三組數分別爲 $\{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}$ 與 $\{5, 6\}$ 中的三組。其分配方法數共有 $8 \times 6 \times 4 = 192$ 種。(a_1 有 8 種選擇，a_2 有 6 種選擇，a_3 有 4 種選擇。)

因此，所求的多項式 $f(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ 共有 $48 + 48 + 192 = 288$ 個。 $\|$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

北區 第三區(建國中學)

1. 【參考解答】：$P_{2003}=\frac{6009}{2005}$。

2. 【參考解答】：正整數序對(m,n)共有$(588,49),(204,51),(76,57)$等三個。

3. 【參考解答】：所求兩點的坐標爲$(1,3)$與$(-3,-1)$。

4. 【參考解答】：1001

5. 【參考解答】：$\overline{PQ}$的爲$\frac{7\sqrt{21}}{10}$公分。

6. 【參考解答】：30 個。

7. 【參考解答】：$x=1$或$x=\frac{2}{3}$或$x=\frac{3}{2}$。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第四區(新竹高中)

[問題一]：在坐標平面上給定一點 $A(2,5)$，試在直線 $y=x$ 上找一點 P，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

【參考解答】：令 A' 爲 $A(2,5)$ 對直線 $y=x$ 的對稱點，即 $A'=(5,2)$ ，則在直線 $y=x$ 上任意一點 P，恆有 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ ，且 A' 恰好在直線 $2x-5y=0$ 上。若 Q 爲 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足，則 $\overline{AP}-\overline{PQ}=\overline{A'P}-\overline{PQ}=\overline{A'P}-\overline{PQ}\geqq 0$.

因此，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}=0$ 爲最小，此即 $A'=Q$。故 P 點爲直線 $5x+2y=29$ 與直線 $y=x$ 的交點。因此，可得 P 的坐標爲 $(\frac{29}{7},\frac{29}{7})$ 。

[問題二] ：試求出所有的正整數 a、b，使得 $\frac{a^2+b}{ab+1}$ 為正整數。

【參考解答】：我們將證明所求的解爲$(1, k), (k, k+1), (k^2,k)$，其中 k 爲任意的正整數。

注意：$\frac{a^2+b}{ab+1}\geqq 1$ 之充要條件爲$(a-1)(a+1-b)\geqq 0$.

(i) 當 $a=1$ 時，b 可爲任意的正整數。經檢驗可知 $(a, b)=(1, k)$ 爲滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。

(ii) 當 $a\geqq 2$ 時，$1\leqq b\leqq a+1$。若 $b=a+1$，則經檢驗可知$(a, b)=(k, k+1)$ 爲滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。若

$1\leqq b\leqq a$，令 $\frac{a^2+b}{ab+1}=m$，則

$a^2+b=(ab+1)m=abm+m$.

於是可得，$m\not\equiv b \pmod a$。故可令 $m=aq+b$，其中 q 爲一非負整數；亦即 $a^2+b=(ab+1)(aq+b)$。化簡可得 $a=abq+q+b^2$。因此，比較兩邊大小可知：$q=0$，且 $a=b^2$。經檢驗，$(a, b)=(k^2, k)$ 也是滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。

[問題三]： 將 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 為 $1, 2, 3, \cdots, 48$ 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的 16 個數中是偶數的個數。

(a) 試證：$f(1)\ f(2)\cdots f(48)\leqq 2^{144}$；

(b) 試證：必有一整數 $k\in\{1, 2, 3, \cdots, 48\}$ 使得 $f(k)=8$.

【參考解答】:

(a) 注意：$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 中有 24 個偶數，每一偶數在計算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(48)$之和中各重複了 16 次，因此，

$f(1)+f(2)+\cdots+f(48)=24 \cdot 16 = 384$.於是，由算幾不等式，可得

$$\prod_{n=1}^{48} f(n) \le \left(\frac{1}{48}\sum_{n=1}^{48} f(n)\right)^{48} = \left(\frac{384}{48}\right)^{48} = 8^{48} = 2^{144}$$

(b) 若每一個 $f(k) = 8$，則證畢；若有一個 $f(k) \neq 8$，則由(a)可知：必有一組 m, n 使 $f(m) < 8 < f(n)$。不失一般性，可設 $m < n$。注意：對每一 k，恆有 $|f(k+1)- f(k)| = 0$ 或 1。故必存在一 $k \in \{m+1, m+2, \cdots, n-1\}$使得 $f(k) = 8$。(此爲整數集上離散型的中間值定理)

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

北區 第四區(新竹高中)

1. 【參考解答】：$\frac{18}{49}$。

2. 【參考解答】：26

3. 【參考解答】：$\frac{5}{2}$

4. 【參考解答】：$\frac{\sqrt{5}}{2}$

5. 【參考解答】：18

6. 【參考解答】：131

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

（台中一中）

[問題一]：設函數F之定義域為$\mathbb{R}$上除了$x=0$及$x=1$。求滿足下列條件之$F(x)$：

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x\text{。}$$

【參考解答】：已知

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..(1)$$

用$\frac{x-1}{x}$代x，得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於(1)中用$\frac{-1}{x-1}$代x，得

$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

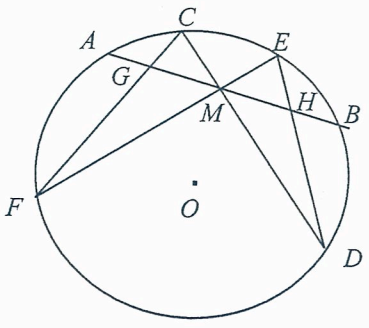
(1)+(3)-(2)

$$2f(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}$$

所以

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}.$$

[問題二]：已知O為圓心，M為弦$\overline{AB}$之中點，過M作兩弦$\overline{CD}$與$\overline{EF}$；連接$\overline{CF},\overline{DE}$分別交$\overline{AB}$於$G,H$，求證$\overline{MG}=\overline{MH}$。



【參考解答】：$\Delta MDE = \Delta MDH + \Delta MHE$

$$\frac{1}{2}\overline{MD}\cdot\overline{ME}\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}\overline{MD}\cdot\overline{MD}\sin\beta+\frac{1}{2}\overline{ME}\cdot\overline{ME}\sin\alpha$$

在此$\alpha=\angle EMH,\beta=\angle DMH$

除以$\overline{MD}\cdot\overline{ME}\cdot\overline{MH}$得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{MH}}=\frac{\sin\beta}{\overline{ME}}+\frac{\sin\alpha}{\overline{MD}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..(1)$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{MG}}=\frac{\sin\beta}{\overline{MF}}+\frac{\sin\alpha}{\overline{MC}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..(2)$$

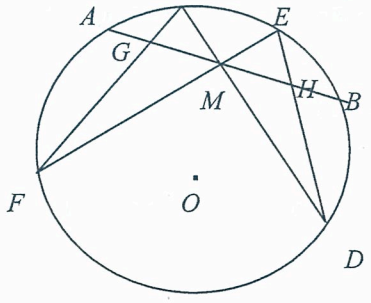
(1)-(2)得 $\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\overline{MH}}-\frac{1}{\overline{MG}}\right)$

$$=\frac{\sin\beta}{\overline{ME}\cdot\overline{MF}}\left(\overline{MF}-\overline{ME}\right)-\frac{\sin\alpha}{\overline{MC}\cdot\overline{MD}}\left(\overline{MD}-\overline{MC}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots.(3)$$

設P,Q分別爲$\overline{DC},\overline{EF}$中點

$$\begin{matrix}\overline{MF}-\overline{ME}=2\overline{MQ}=2\overline{MO}\sin\alpha\\ \overline{MD}-\overline{MC}=2\overline{MF}=2\overline{MO}\sin\beta\end{matrix}\cdots\cdots\cdots\cdots.(4)$$

(4)代入(3)及$\overline{ME}=\overline{MF}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$，(3)式右邊爲$O\Rightarrow\overline{MH}=\overline{MG}$



[問題三]：證明對於任意自然數n，存在一個自然數k使得$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$。

【參考解答】：因$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$，只要證明$\forall\ n\in N$，$\exists\ k\in N$，使得

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$$

(1)證明給定奇正整數n，存在$b\in k$，$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=b\sqrt{2}+m$，其中

$m=\sqrt{2b^2-1}\in N$

歸納法：$n=1$成立，假設$n=2\ell+1$成立，則存在$b,m\in N$

使得$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=b\sqrt{2}+m$，則

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+2}=\left(b\sqrt{2}+m\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$=(3b+2m)\sqrt{2}+3m+4b$$

檢查　$3m+4b$是否是$\sqrt{2(3b+2m)^2-1}$？

因　$2(3b+2m)^2-1=18b^2+24mb+8m^2-1$

且　$m^2=2b^2-1$

所以　$18b^2+24mb+8m^2-1=16b^2+m^2+1+24mb+8m^2-1$

$$=(3m+4b)^2$$

由歸納假設$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1}$成立對奇自然數$n$。

(2)假如n爲偶數，則$n=2\ell$，$\ell\in N$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ell}=\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2 \quad \text{for some} \quad k\in N$$

$$=2k-1+\sqrt[2]{k^2-k}$$

$$=\sqrt{(2k-1)^2}+\sqrt{4k^2-4k} \quad \text{成立}$$

[問題四]：令Q^+表正有理數集，N表自然數集，定義$f:N\to Q^+$如下：

$$f(1)=1,\ f(2n)=f(n)+1,\ f(2n+1)=\frac{1}{f(2n)}。$$

(1)求證若$f(x)=f(y)$則$x=y$。

(2)求證對任意$q\in Q^+$必存在一個自然數n，使得$f(n)=q$。

【參考解答】：

(1) By math. Ind.

Assume $f(1), f(2), \cdots, f(n-1)$ and all diff.

If $f(n) = f(k)$ for some $k < n$

n is odd $\Rightarrow$ $f(n-1) = f(k-1) \Rightarrow f(1), \cdots, f(n-1)$ are not all diff.

$(\rightarrow\leftarrow)$

n is new $\Rightarrow$ k is even $\quad \because f(x) > 1$ only for x even

$$\Rightarrow f\left(\frac{k}{2}\right) = f\left(\frac{n}{2}\right) \quad \rightarrow\leftarrow \text{(all diff.)}$$

(2) Let $x = \frac{a}{b}$ $\quad (a,b) = 1$. $\quad$ Define $S(x) = a + b$

$\Rightarrow$ "All rational x with $S(x) \leq 2$ are in the image of f" is True.

Assume, rational x with $S(x) \leq n-1$ are in the image of f" is True.

Now, $y \in Q \qquad S(y) = n$

① if $y > 1$ then $a > b$, Take $z = y - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow S(z) = a - b + b < S(y) = n$

By hypoh. $\quad z \in R(f)$, $\quad z \in f(k)$. $\quad$ Then $f(2k) = z + 1 = y$.

② if $y > 1$, slimily $\frac{1}{y} > 1$, $\quad \frac{1}{y} > R(f)$

$$f(k) = \frac{1}{y} \quad \text{then} \quad f(k+1) = y.$$

$\therefore$ onto.

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

（台中一中）

1. 【參考解答】：$a=\frac{4}{9},b=-\frac{2}{9},c=\frac{1}{9}$.

2. 【參考解答】：$\sqrt{8}$

3. 【參考解答】：$(x\circ y)=(x\circ y)\circ(x\circ y)=[(x\circ y)\circ x]\circ y$

$=[(y\circ x)\circ x]\circ y=[(x\circ x)\circ y]\circ y$

$=(x\circ y)\circ y=(y\circ y)\circ x=y\circ x$

由此可得

$(x\circ y)\circ z=(y\circ z)\circ x=x\circ(y\circ z)$

4. 【參考解答】：

(1)設$a\geq b\geq 1$且$(a,b,1)$為三角形的三邊長，

$a+b+1=n=2k$

由$\begin{cases}a+b>1\\ a+1>b\\ b+1>a\end{cases}$ $\therefore a<k$, $b<k$ ⟹ 不可能成立

(2)設(a,b,c)是周長為$2n$的三角形三邊長$(a\geq b\geq c)$

由(1)知$c\geq 2$

$\Rightarrow(a,b,c-1)$是周長為$2n-1$的三角形三邊長

$\therefore T(2n)\leq T(2\text{-}1)$

今考慮周長為$2n-1$且形如(a,b,b)的三角形，

可知在上述對應中並無周長為$2n$的三角形對應到(a,b,b)，

故知$T(2n)\neq T(2\text{-}1)$

$\Rightarrow T(2n)<T(2n-1)$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

(嘉義高中)

[問題一]：試證$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{a(j)}<2\sqrt{n}$，其中$a(j)$為與$\sqrt{j}$最接近之整數。

【參考解答】：$S_k=\left\{j\left|\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<j\le\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right.\right\}$

$$|S_k|=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2=2k$$

若$j\in S_k$，則$a(j)=k$，

若$n\in S_{k_0}$，則$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a(j)}=\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in S_k}\frac{1}{a(j)}\le 2k_0$

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{a(j)}\le 2k_0-1<2\sqrt{n}+1$$

($\because n\in S_{k_0}\qquad\therefore(k_0-1)^2<n,\ \ (k_0-1)<\sqrt{n}$)

[問題二]：已知a,b,c皆為正實數，且$abc=1$，試證$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\ge\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$

等號何時成立？（說明你的理由）

【參考解答】：$8(a+b+c)^2-9\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$

$$=8\left(a^2+b^2+c^2\right)+16(ab+bc+ca)-18-9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$=8\left(a^2+b^2+c^2\right)+7\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9(a+b+c)-18$$

$$=\frac{1}{a}\left(8a^3-9a^2-6a+7\right)+\frac{1}{b}\left(8b^3-9b^2-6b+7\right)+\frac{1}{c}\left(8c^3-9c^2-6c+7\right)$$

$$=\frac{1}{a}(a-1)^2(8a+7)+\frac{1}{b}(b-1)^2(8b+7)+\frac{1}{c}(c-1)^2(8c+7)\ge 0$$

等號成立$\Leftrightarrow a=b=c=1$.

[問題三]：兩圓 C_1 及 C_2 的圓心分別為 O_1,O_2，這兩圓交於兩點 A,B，兩圓之公切線為 L_1,L_2,L_1 分別交圓 C_1,C_2 於 P_1,P_2 兩點，L_2 分別交圓 C_1,C_2 於 Q_1,Q_2 兩點。試證 AB 平分線段 P_1P_2 及 Q_1Q_2。

【參考解答】：M_1,M_2 分別為 P_1,Q_1,P_2,Q_2 之中點只需證明 AB 平分 M_1,M_2.

$d=|O_1O_2|$，r_1 為 c_1 之半徑，r_2 為 c_2 之半徑，P_1,P_2,Q_1,Q_2 交於 L.

$\ell=|LO_1|$，$\dfrac{\ell}{r_1}=\dfrac{r_1}{|M_1O_1|},\dfrac{\ell+d}{r_2}=\dfrac{r_2}{|M_2O_2|}$

AB, Q_1Q_2 交於 M，$h=|AM|$

$x=|M_1O_1|=\dfrac{r_1^2}{\ell}$，$|M_2O_2|=\dfrac{r_2^2}{\ell+d}=\dfrac{r_2}{r_1}|M_1O_1|$　（$\because \Delta P_1M_1O_1\sim\Delta P_2M_2O_2$）

$\dfrac{r_2}{\ell+d}=\dfrac{x}{r_1}=\dfrac{r_1^2}{\ell}\dfrac{1}{r_1}=\dfrac{r_1}{\ell}$

$r_1\ell+r_1d=r_2\ell \quad \therefore \ell=\dfrac{r_1d}{r_2-r_1}$

又　$|O_1M|^2=r_1^2-h^2$

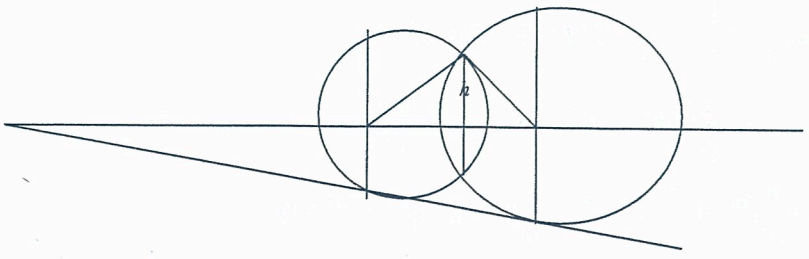
$|O_2M|^2=r_2^2-h^2$

$$|M_1M|-|M_2M|=|M_1O_1|+|O_1M|-(|O_2M|-|M_2O_2|)$$

$$=\frac{r_1}{d}(r_2-r_1)+\frac{r_2(r_2-r_1)}{d}+\sqrt{r_1^2-h^2}-\sqrt{r_2^2-h^2}$$

$$=\frac{r_2^2-r_1^2}{d}+\frac{r_1^2-r_2^2}{\sqrt{r_1^2-h^2}+\sqrt{r_2^2-h^2}}=0$$

$\therefore |M_1M|=|M_2M|$



[**問題四**]：有 10 個人至新竹的果園採柿子。已知每人至少採 1 個，至多不超過 80 個。證明必定可以從這 10 人當中挑出甲乙兩群不同的人（即甲乙兩群之交集為空集合），使得甲群所採之柿子之總數和乙群相同。（註：甲乙兩群總人數並不一定為 10）

【參考解答】：10 個人中任何一群人所採個數必介於 1 和 800 之間，但 10 個人可組成 $2^{10}-1=1023$ 不同的群。由鴿籠原理知一定有不同的 2 群 S_1, S_2 使得他們的個數和相同。因為每人至少採一個，故 $S_1 \not\subset S_2$ 且 $S_2 \not\subset S_1$，因此 $S_1-(S_1 \cap S_2)$ 和 $S_2-(S_1 \cap S_2)$ 為不相交的（非空）兩群，而且他們所採個數和相同。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

(嘉義高中)

1. 【參考解答】: $f^{-1}(b)=\begin{cases} b/3 & if \quad b\geq 0; \\ b/11 & if \quad b<0. \end{cases}$

2. 【參考解答】: π

3. 【參考解答】: $\frac{6}{5.}$

4. 【參考解答】: $\frac{13}{299\times 481}=\frac{1}{11063}$

5. 【參考解答】: $g\left(\frac{1}{2}\right)=2$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

(台南一中)

[問題一]：投擲一枚公正的錢幣 2n 次，證明出現正面的次數至少為 n 次的機率為

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\binom{2n}{n}$$

【參考解答】：$P\{\text{at least n heads}\}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

[問題二]：請問對於所有的實數 x，$\sin(\cos x),\cos(\sin x)$ 哪一個大？(請詳細證明)

【參考解答】：

$$-1\le \sin x\le 1 \quad \forall x \text{ implies } \cos(\sin x)>0 \quad \forall x$$

So $$\cos(\sin x)>0\ge\sin(\cos x) \quad \forall x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \qquad (1)$$

If $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ then $|\sin x|<|x|$ and

$$\cos(\sin x)=\cos|\sin x|>\cos|x|\ge\sin|\cos x|\ge\sin(\cos x) \qquad (2)$$

cos(sin0)=cos0=1>sin1=sin(cos0).Put this together with(1)and(2)one gets

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x) \quad \forall x$$

[問題三]：設 p(x)為整係數多項式，且滿足 $p(m_1)=p(m_2)=p(m_3)=p(m_4)=13$。這裡 m_1，m_2，m_3，m_4 是給定相異整數。證明沒有整數 m，使 p(m)=20。

【參考解答】：Let $p(x)=(x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)Q(x)+13$.If $m \in \mathbf{Z}$ s.t. $p(m)=20$ then $Q(m) \in \mathbf{Z}$ and

$$(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4)Q(m)+13=20$$

$$(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4)Q(m)=7$$

$m_i, i=1,2,3,4$ are all different so integers $m-m_i, i=1,2,3,4$ are all different and at least two of them have absolute values other than 1，their product can be divisor of 7.

[問題四]：設 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=2$ 且對任一正整數 n 都有 $f(3n)=f(n)$，$f(3n+1)=f(n)+1$，$f(3n+2)=f(n)-1$，試求 $f(3721)$之值。

【參考解答】：

$$\begin{aligned} f(3721) &= f(3\cdot 1240+1) = f(1240)+1 = f(3\cdot 413+1)+1 = f(413)+1+1 \\ &= f(3\cdot 137+2)+2 = f(137)-1+2 = f(3\cdot 45+2)+1 \\ &= f(45)-1+1 = f(3\cdot 15) = f(15) = f(3\cdot 5) = f(5) = f(3\cdot 1+2) \\ &= f(1)-1=1-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

(台南一中)

1.【參考解答】: If $n>1$ and $x>0$ then $(1+x)^n>1+nx$. So

$$(1+0.0000001)^{10000000}>1+10000000(0.0000001)=1+1=2$$

So $$(1+0.0000001)^{10000000}>2$$

2.【參考解答】:

(1) $$(\alpha^2-2)(\beta^2-2)=(\alpha^2-2)((1+\frac{1}{\alpha+1})^2-2)$$

$$=(\alpha^2-2)(\frac{2}{\alpha+1}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}-1)$$

$$=(\alpha^2-2)(2(\alpha+1)+1-(\alpha+1)^2)(\alpha+1)^{-2}$$

$$=(\alpha+1)^{-2}(\alpha^2-2)(2-\alpha^2)$$

$$<0$$

So 2 is between α^2 and β^2. $\sqrt{2}$ 介於α與β之間。

(2) $$(\alpha^2-2)/(2-\beta^2)=(\alpha^2-2)((1+\frac{1}{\alpha+1})^2-2)$$

$$=(\alpha+1)^2(\alpha^2-2)/(\alpha^2-2)$$

$$>1$$

So β較接近$\sqrt{2}$。

3.【參考解答】:

$$P(z)=200z^5+201z^4+202z^3+203z^2+204z+205$$

$$=200(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)+(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

$$+(z^3+z^2+z+1)+(z^2+z+1)+(z+1)+1$$

$$(z-1)P(z)=200(z^6-1)+(z^5-1)+(z^4-1)+(z^3-1)+(z^2-1)+(z-1)$$

$$=(200z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z)-205$$

If $|z|<1$ then

$$|200z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z|\le 200|z|^6+|z|^5+|z|^4+|z|^3+|z|^2+|z|$$

$$<200+1+1+1+1+1=205$$

So

$$(z-1)P(z)= (200z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z)-205 \neq 0$$

Thus $P(z) \neq 0$.

4.【參考解答】：$S_n=n(n+1)/2$，$S_n-1=[n(n+1)/2]-1=(n^2+n-2)/2=(n-2)(n+1)/2$

$$T_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{S_k}{S_k-1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)}{(k+2)(k-1)}$$

$$=\frac{\prod_{k=2}^{n}k(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k+2)(k-1)}$$

$$=\frac{\prod_{k=2}^{n}k\prod_{k=3}^{n+1}k}{\prod_{k=1}^{n-1}k\prod_{k=4}^{n+2}k}$$

$$=\frac{3n}{n+2}$$

So

$S_{2003}=\frac{3(2003)}{2003+2}=\frac{6009}{2005}$。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽口試題目及參考解答

（台南一中）

編號：_____

口試題目

設 x 為任一實數，N 為任一大於 1 的整數。試證存在整數 m 與正整數 k ($k \le N$)，使得 $|kx - m| < 1/N$。

【參考解答】：If $\exists 0 < k < N$ such that kx is an integer,take m=kx and done.

Otherwise define a_n=nx-[nx],n=0,1,2,…,N,where [ ]denote the largest integer. Then $\{a_n | n=0,1,2,\ldots,N\}$ are N+1 numbers in the n intervals

$$\left(\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), n=0,1,2,\ldots,N$$

There must be integers i,j and n with $0 \le i < j \le N$ and $n \le N$ such that $a_i \in \left(\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$ and $a_j \in \left(\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$. This implies $|a_j - a_i| < 1/N$.

Set k=j-i and m=[jx]-[ix] then $0<k\le N$ and

$$\begin{aligned} |kx - m| &= |(j-i)x - ([jx] - [ix])| \\ &= |(jx - [jx]) - (ix - [ix])| \\ &= |a_j - a_i| \\ &< 1/N \end{aligned}$$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

(高雄中學)

[問題一]：m, n 為正整數；試證該兩數的乘積 mn 為偶數的充要條件為存在二非負整數 p, q 使得 $m^2+n^2+p^2=q^2$。

【參考解答】：首先證明：若 mn 爲偶，則存在非負整數 p, q 滿足 $m^2+n^2+p^2=q^2$。
首先假設 m, n 其中一者爲奇，在不失一般性下，可設 m 爲奇，n 爲偶，
此時 m^2+n^2 是一正奇數，則取

$$p=\frac{m^2+n^2-1}{2}\text{，}q=\frac{m^2+n^2-1}{2}\text{，且知 }p\text{, }q\text{ 均爲非負整數，}$$

則 $q^2-p^2=(q+p)(q-p)=m^2+n^2$，即 $m^2+n^2+p^2=q^2$。
若 m, n 皆爲偶，則 m^2+n^2 是 4 的倍數，此時令

$$p=\frac{m^2+n^2}{4}-1\text{，}q=\frac{m^2+n^2}{4}+1\text{，且知 }p\text{, }q\text{ 均爲非負整數，}$$

則 $q^2-p^2=(q+p)(q-p)=\frac{m^2+n^2}{2}\cdot 2=m^2+n^2$，得證。
反之，若 mn 爲奇，則 m, n 皆爲奇，此時存在 a, $b\in N$ 滿足 $m=2a-1$, $n=2b-1$，
則 $m^2+n^2=(2a-1)^2+(2b-1)^2=4(a^2+b^2-a-b)+2$
故 $m^2+n^2\equiv 2\pmod 4$，而正整數的完全平方數模 4 只可能是 0 或 1（奇數平方模 4 是 1，偶數平方模 4 是 0），
故不論 p, q 爲任何非負整數，都不能滿足 $q^2-p^2\equiv m^2+n^2\equiv 2\pmod 4$，從而不可能 $m^2+n^2+p^2=q^2$，
因此 $m^2+n^2+p^2=q^2\Rightarrow mn$ 爲偶，證畢。

[問題二]：設集合 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$，在這 100 個數中，先將這些數中是 2 的倍數乘以 i，其中 $i=\sqrt{-1}$；之後，再將這些數中是 3 的倍數及虛部是 3 的倍數的複數乘以 i；現在從經過上述兩次處理後的 100 個數中任意挑選 3 個相異的數，並將這 3 個數加起來令其和為 a_k。試求所有這種 3 個相異數和 a_k 的總和。

【參考解答】：將 S 中的數分爲三種：

a. $\{1,5,7,11,\cdots,97\}$這些形如 $6n+1$, $6n+5$ 的數，這些數在兩次處理後仍不變。
b. $\{2,3,4,8,9,10,\cdots,98,99,100\}$形如 $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ 的數，這些數在兩次處理後會乘上 i。

c. $\{6,12,\cdots,96\}$這些形如$6n$的數，經兩次處理後變成相反數。

不論是任一種狀況，經兩次處理後其大小不變，而原S中的100個數大小皆不同，因此經處理後之所有數皆相異，令S經兩次處理後成爲S'，在S'取3個相異數的取法有$C_3^{100}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}$種，每一種會選3個數，因此選了$100\cdot\frac{99\cdot 98}{2}$個數，由於上述動作皆不失一般性，故每一數各取了$\frac{99\cdot 98}{2}$次，因此其總和等於$\frac{99\cdot 98}{2}\sum_{X\in S'}X$，其中

$\sum_{X\in S'}X=(1+5+7+11+\cdots+91+95+97)+i(2+3+4+8+9+10+\cdots+98+99+100)-(6+12+18+\cdots+96)=1536+97+2601i-816$，故總和$=4851(817+2061i)$

[問題三]：設n為正整數，若數字1有$5n+1$個，數字2有n個，數字3有n個；今將這$7n+1$個數字排成一排，試證：一定可以在所排成一排的數字中找到一個數字1，使得該數字1左邊所有數字1的總和等於左邊其他數字的總和。

（當然，在此特定數字1的右邊也有此性質）

【參考解答】：首先，若最左邊的數是1，則該數即符合本題所述的性質，因此我們可假設最右邊的數不是1，同樣地，我們可以假設最左邊的數亦不是1，現在定義一個1的值爲這個1左邊的數1的總和減去其他數字的總和，而以下將證明存在一個1，它的值爲0。

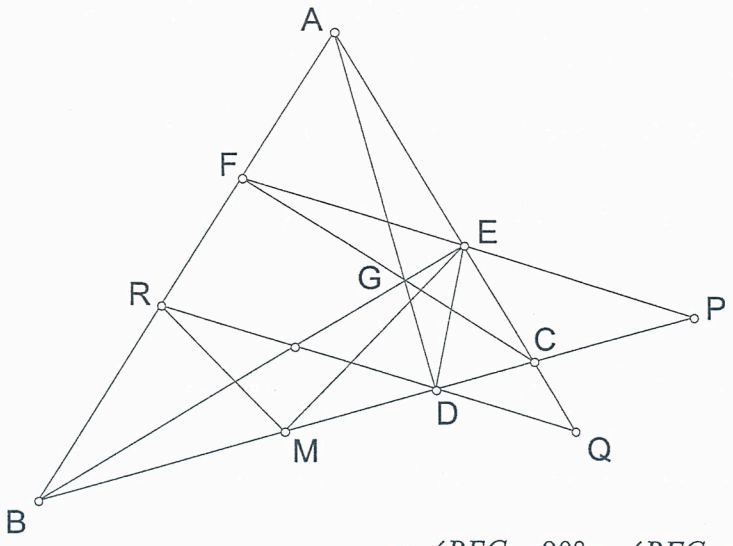
首先我們觀察最左邊的1，他的值必然是負的(因爲它的左邊沒有了1，但根據我們的假設，他左邊仍有其他的數)，而最右邊那個1，它的值必然是正的(因爲所有的1都在它的左邊，但根據假設，並非所有的2，3都在它左邊)，現在我們找出所有值爲負的1中(至少有一個，即最左邊的)，最右邊的一個令它爲I，由於這個1並不是所有1中最右邊的(因最右邊的爲正)，故它必然還有一個在它右邊的1，令那個1爲J，(這裡的右邊指的是右邊的所有1中最靠近的)，以下證明$S=0$

(以下V_I，V_J表I，J的值)

首先若I，J中有任何2或3存在，$V_J\le V_I+1-2<0$，與I的定義矛盾，故I，J爲相鄰的兩個1，此時$V_J=V_I+1$，由於V_J須≥ 0，故有$V_I=-1$，$V_J=0$，得證。

[問題四]：設三角形ABC為銳角三角形，其中$\overline{AB}>\overline{AC}$，今從三頂點$A$，$B$，$C$所作$\Delta ABC$的三高在其對邊的垂足分別為$D$，$E$，$F$；過$D$作$\overline{EF}$的平行線，分別交直線$AB$於$Q$和$R$；而直線$EF$交直線$BC$於$P$。試證$\Delta PQR$的外接圓通過線段$\overline{BC}$的中點。

【參考解答】:



設 $\overline{BC}$ 中點爲 M ， $\overline{CM}=\overline{BM}$

要證 $PQMR$ 共圓

$\Leftrightarrow \overline{PD}\cdot\overline{DM}=\overline{DQ}\cdot\overline{DR}$ ...(1)

$\because \overline{RQ}$ 平行 $\overline{FP}$ ，故

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{PC}},\ \frac{\overline{DR}}{\overline{FP}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BP}}$$

$$\Rightarrow \overline{DQ}=\frac{\overline{EP}\cdot\overline{CD}}{\overline{PC}},\ \overline{DR}=\frac{\overline{FP}\cdot\overline{BD}}{\overline{BP}}$$

由(1)

$$\overline{PD}\cdot\overline{DM}=\frac{\overline{EP}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{FP}\cdot\overline{BD}}{\overline{PC}\cdot\overline{BP}}\cdots(2)$$

$\because \angle BEC=90^\circ=\angle BFC$ ， $\therefore EFBC$ 共圓 $\Rightarrow \overline{PE}\cdot\overline{PF}=\overline{PC}\cdot\overline{PB}$

由(2) $\overline{PD}\cdot\overline{DM}=\overline{CD}\cdot\overline{BD}$

$\Leftrightarrow (\overline{PM}-\overline{DM})\,\overline{DM}=(\overline{CM}-\overline{DM})\,(\overline{BM}+\overline{DM})=(\overline{BM}-\overline{DM})\,(\overline{BM}+\overline{DM})$

$\Leftrightarrow \overline{PM}\cdot\overline{DM}-\overline{DM}^2=\overline{BM}^2-\overline{DM}^2$

$\Leftrightarrow \overline{PM}\cdot\overline{DM}=\overline{BM}^2 \Leftrightarrow \overline{PM}\cdot\overline{DM}=\overline{ME}^2$ ($\because \overline{BM}=\overline{ME}$) ⋯(3)

$\because \angle GEC+\angle GDC=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\therefore GDCE$ 共圓，同理 $FGDB$ 共圓，又 $EFBC$ 共圓

$\Rightarrow \angle EDG=\angle GCE=\angle GBF=\angle ABC-\angle EBM=\angle ABC-\angle BEM$

$\Rightarrow \angle EDM=90^\circ+\angle EDG=90^\circ+\angle ABC-\angle BEM=90^\circ+\angle PEC-\angle BEM=\angle MEP$

又 $\angle EMD=\angle PME$

$\therefore \Delta MED\sim\Delta MPE$

$\Rightarrow \frac{\overline{ME}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{ME}}\Rightarrow \overline{MD}\cdot\overline{MP}=\overline{ME}^2$ 此式成立。

此式即爲(3)式，∵推理步步可逆故得證。

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

(高雄中學)

1. 【參考解答】：$f(100)=7\times 2^{97}-1$

2. 【參考解答】：$\dfrac{1}{\sin\angle BAP}+\dfrac{1}{\sin\angle CAP}$

3. 【參考解答】：

(a) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

(b) $C_{76}^{2002}=\dfrac{2002!}{76!1926!}$

4. 【參考解答】：A是曾女士，B是吳女士，C是方女士

5. 【參考解答】：

(a) $a+b$的值爲 16

(b) 尾數是 4

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

(屏東高中)

[問題一]：試求最小的質數n，使得$\frac{100!}{(n!)^2}$不為整數。

【參考解答】：$C_n^{2n}=\frac{(2n!)}{(n!)(n!)}=\frac{(2n!)}{(n!)^2}$爲一正整數，則知$\frac{(100!)}{(50!)^2}$仍爲一整數，故$n>50$

考慮$n=53$

$53!$中，53倍數有1個，因此$53^2\mid(53!)^2$

而$100!$中，53倍數只有1個，因此$53\mid 100!$ 但$53^2\nmid 100!$

故當$n=53$時使原式不爲整數。

[問題二]：設a_n表示3^n的個位數字，試求$a_1+a_2+\cdots+a_{2002}+a_{2003}$之值。

【參考解答】：

$n=1 \quad a_1=3$
$n=2 \quad a_2=9$
$n=3 \quad a_3=7$
$n=4 \quad a_4=1$
$n=5 \quad a_5=3$
$\vdots$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2003\div 4=500\ldots 3 \\ \therefore (3+9+7+1)\times 500+3+9+7 \\ =10000+19=10019 \end{array}$$

[問題三]：設p,q,r為介於0與1之間的三個實數，試證在0與1之間存在一個實數x使得$\frac{1}{|x-p|}+\frac{1}{|x-q|}+\frac{1}{|x-r|}<20$

【參考解答】：首先將$[0,1]$區間等分成6塊區域，每塊區域寬度是1/6

我們將I_i定義爲區間$[(i-1)/6, i/6]$，即

$I_1=[0,1/6], I_2=[1/6,2/6], I_3=[2/6,3/6], \cdots, I_6=[5/6,1]$

情形一：當p,q,r三點都落於同一區間，以表格說明

第一欄係指所位於的區間，第二係指x值所取的區間

p,q,r所在區間	x所取的區間	p,q,r所在區間	x所取的區間
I_1	I_3	I_4	I_1

I_2	I_4	I_5	I_2
I_3	I_6	I_6	I_3

情形二：當 p , q , r 三點分別落於不同的二個區間內，則

p , q , r 所在區間	x 所取的區間	p , q , r 所在區間	x 所取的區間
I_1 , I_2	I_4	I_2 , I_4	I_6
I_1 , I_3	I_5	I_2 , I_5	$x=3/6$
I_1 , I_4	I_6	I_2 , I_6	I_4
I_1 , I_5	I_3	I_3 , I_4	I_1
I_1 , I_6	I_3	I_3 , I_5	I_1
I_2 , I_3	I_5	I_3 , I_6	I_1
I_4 , I_5	I_1	I_5 , I_6	I_1
I_4 , I_6	I_1		

情形三：當 p , q , r 三點分別落於不同區間

p , q , r 所在區間	x 所取的區間	p , q , r 所在區間	x 所取的區間
I_1 , I_2 , I_3	I_6	I_2 , I_3 , I_4	I_6
I_1 , I_2 , I_4	I_6	I_2 , I_3 , I_5	$x=1$
I_1 , I_2 , I_5	$x=3/6$	I_2 , I_3 , I_6	$x=4/6$
I_1 , I_2 , I_6	I_4	I_2 , I_4 , I_5	$x=1$
I_1 , I_3 , I_4	I_6	I_2 , I_4 , I_6	$x=0$
I_1 , I_3 , I_5	$x=1$	I_2 , I_5 , I_6	$x=3/6$
I_1 , I_3 , I_6	$x=4/6$	I_3 , I_4 , I_5	I_1
I_1 , I_4 , I_5	$x=2/6$	I_3 , I_4 , I_6	I_1
I_1 , I_4 , I_6	$x=2/6$	I_3 , I_5 , I_6	I_1
I_1 , I_5 , I_6	I_3	I_4 , I_5 , I_6	I_1

此時 $|x-p|>\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{|x-p|}<6$ ，同理 $\frac{1}{|x-q|}<6$, $\frac{1}{|x-r|}<6$

故存在 x 於 $[0,1]$ 中，使得 $\frac{1}{|x-p|}+\frac{1}{|x-q|}+\frac{1}{|x-r|}<6+6+6=18<20$

[問題四]：試求滿足方程式 $(y+1)^2=x^4+20x^3+104x^2+40x+2004$ 的所有整數解 (x,y)

【參考解答】：$(y+1)^2=(x^2+10x+2)^2+2000$

$(y+1)^2-(x^2+10x+2)^2=2000$

$(y+1+x^2+10x+2)(y+1-x^2-10x-2)=2000$

令$u=y+1+x^2+10x+2$，$v=y+1-x^2-10x-2$

則$u+v=2y+2$爲一偶數，且$uv=2000$亦爲偶數，故u,v均爲偶數。

而$u-v=t=2x^2+20x+2$要有整數解，則$2x^2+20x+2-t=0$要有整數解，

故此一元二次方程式之判別式$10^2-2(2-t)=96+2t$爲一完全平方數。$t>-48$

u	1000	500	250	200	100	50
v	2	4	8	10	20	40
$u+v$	1002	504	258	210	120	90
$u-v=t$	998	496	242	190	80	10
$96+2t$	2092	1088	580	476	256	116
(x,y)					(3 , 59) (–13 , 59)	

u	40	-20				
v	50	-100				
$u+v$	90	-120				
$u-v=t$	-10	80				
$96+2t$	76	256				
(x,y)		(3 , –61) (–13 , –61)				

故得到四組整數解。

[問題五]：直線L上有兩相異固定點B與C，已知B與C相距d單位；直線L外有一平行線M，兩線相距h單位；已知點A為直線M上的一點且A可以在直線M上自由移動。設A,B,C三點形成一個三角形ABC。

(a)試證：ΔABC的內切圓面積最大時，則ΔABC是一個等腰三角形。

(b)若$d=6,h=4$，試求ΔABC的最大內切圓面積。

【參考解答】：

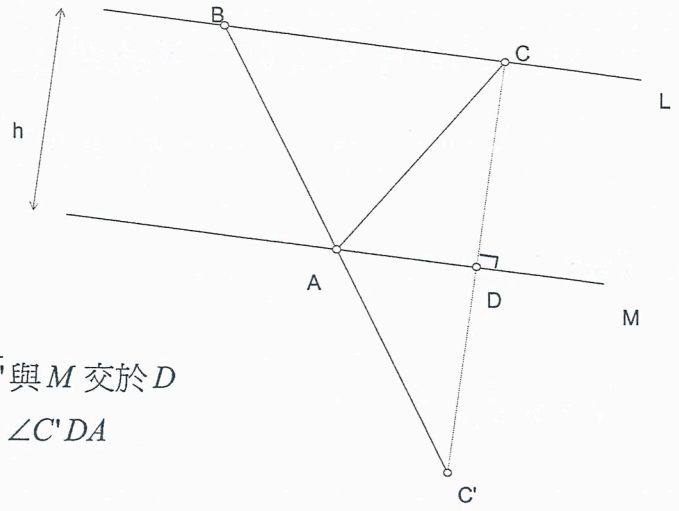
(a) 設內切圓半徑r，ΔABC三邊長爲a,b,c

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}dh=\frac{1}{2}r(a+b+c)\Rightarrow r=\frac{dh}{a+b+c}$$

ΔABC周長最小時，內切圓面積最大

$\therefore\Delta ABC$爲等腰時，周長最小

pf:



如圖，作C對M之對稱點C'，$\overline{CC'}$與M交於D

則$\because \overline{CD}=\overline{DC'}$, $\overline{AD}=\overline{AD}$, $\angle CDA=\angle C'DA$

$\therefore \Delta CDA\cong\Delta C'DA$　　$\therefore \overline{AC}=\overline{AC'}$

$\therefore \Delta ABC$之周長$=\overline{AB}+\overline{AC}+d=\overline{AB}+\overline{AC'}+d$

$\therefore$當A爲$\overline{BC'}$與M之交點時，周長最小，此時，

$\because \angle CBA+\angle BCD+\angle AC'D=180°$　　$\therefore \angle CBA+\angle AC'D=90°$

又$\angle BCA+\angle ACD=90°$, $\angle ACD=\angle AC'D$

$\therefore \angle CBA=\angle BCA$　　$\therefore \Delta ABC$爲等腰三角形。

(b) 當ΔABC爲等腰時，$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore$周長$=5+5+6=16$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 4=\frac{1}{2}\times 16r\Rightarrow r=\frac{3}{2}$　　$\therefore$最大內切圓面積$=\frac{9}{4}\pi$

[**問題六**]：設$a,b,c>0$，且$abc=8$。試證：$\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a}\le\frac{1}{2}$

【**參考解答**】：$a=x^3, b=y^3, c=z^3$，$abc=8\Rightarrow xyz=2$

因爲$x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy\ge xy$

故$\frac{1}{2+a+b}=\frac{1}{2+(x+y)(x^2-xy+y^2)}$

$$\le\frac{1}{2+(x+y)xy}=\frac{(xyz/2)}{xyz+(x+y)xy}=\frac{(z/2)}{z+x+y}$$

同理，$\frac{1}{2+b+c}\le\frac{(x/2)}{x+y+z}$, $\frac{1}{2+a+c}\le\frac{(y/2)}{y+x+z}$

故$\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a}\le\frac{1}{2}\left[\frac{x+y+z}{x+y+z}\right]=\frac{1}{2}$

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)參考解答

(屏東高中)

1. 【參考解答】: $\frac{1}{4}$

2. 【參考解答】: $\frac{3}{4}$

3. 【參考解答】: $n=1$或3

4. 【參考解答】: $x=100\ or\ 10$

5. 【參考解答】: 718