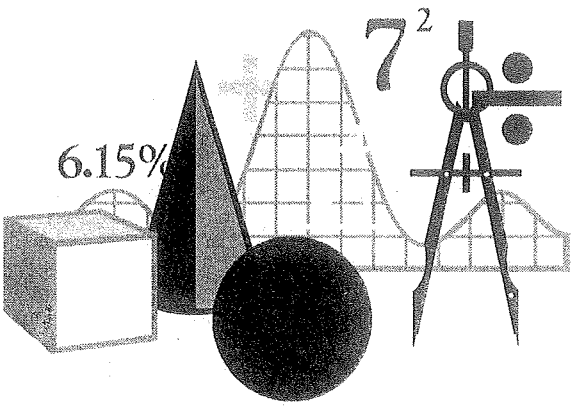
教育部

九十三學年度高級中學數學科能力競賽

決賽總報告



主辦單位：教育部中等教育司

承辦單位：國立高雄師範大學數學系

中華民國九十三年十二月三十一日至九十四年一月二日

伍、筆試試題及參考解答

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（一）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時(13：30～15:30)

(2) 配分：每題 35 分

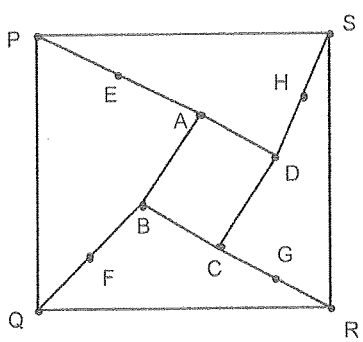
(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上

(4) 不可使用電算器

(5) 試題與答案卷一同繳回

(6) 題目中的圖形僅供解題參考

【問題一】：正方形 $PQRS$ 的內部有一正方形 $ABCD$，若 E,F,G,H 分別是 $\overline{AP},\overline{BQ}$ $\overline{CR},\overline{DS}$ 的中點，試證：四邊形 $EFGH$ 為一正方形。



【問題二】：設 $0<a_1\le a_2\le\cdots\le a_{2005}<1$ ，且對於 $k=1,2,3,\cdots,2005$ ，

$f(k)=\dfrac{k}{1-a_1a_2\cdots a_k}$ ，試證：$f(1)<f(2)<\cdots<f(2005)$

【問題三】：設 S 為 n 個不同正整數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所成的集合，若集合 S 滿足下述條件：

對於集合 S 中任意兩個不同的子集合 A,B，使 A 中所有元素的和與 B 中所有元素的和都不相等。試求滿足這種條件的集合 S 其 n 個元素的倒數和之最大值為何？

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

連PB，取中點M，則$EM // AB$且$EM = \frac{1}{2}AB$，

連QC，取中點N，則$FN // BC$且$FN = \frac{1}{2}BC$

又$FM // PQ$且$FM = \frac{1}{2}PQ$，$GN // QR = \frac{1}{2}QR$

由$AB \perp BC$ $\therefore EM \perp FN$ 而有$\angle EMF = \angle FNG$

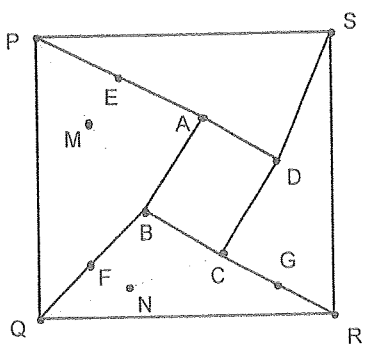
$\Rightarrow \Delta EMF \cong \Delta FNG$ $\therefore EF = FG$

延長MF, NG交於K,則有

$\angle EFG = \angle MFG - \angle MFE$ 又 $\angle MFG = \angle K + \angle KGF$

但$\angle K = 90°$且$\angle MFG = \angle KGF$ $\therefore \angle EFG = 90°$

同理可證：$FG = GH$且$\angle FGH = 90°$, 因此四邊形$EFGH$為正方形



[問題二] 參考解答：

證明 ：

令$x = \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$ 則$1 > a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \geq x^{k+1} > 0$

則$f(k+1) = \frac{k+1}{1 - a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1}} \geq \frac{k+1}{1-x^{k+1}} = \frac{k+1}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)}$

$\because 1 > x > 0 \Rightarrow \frac{1+x+x^2+\cdots+x^k}{k+1} < \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}}{k}$

$\therefore f(k+1) = \frac{1}{(1-x)\frac{1+x+x^2+\cdots+x^k}{k+1}}$

$> \frac{1}{(1-x)\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}}{k}} = \frac{k}{1-x^k} = f(k)$

[問題三] 參考解答：

不妨設 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

先用反證法證明對任意正整數 $k \le n$，$\sum_{i=1}^{k} a_i \ge 2^k - 1$.

若 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 2^k - 1$，則 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 的每個非空子集合的元素和不超過 $2^k - 2$，但 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 有 $2^k - 1$ 個非空子集，按抽屜原則，必有兩個非空子集的元素和相等，這與題設矛盾。

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_n - 2^{n-1}}{2^{n-1} a_n}.$$

令 $c_i = \frac{1}{2^{i-1} a_i}$，$d_i = a_i - 2^{i-1}$，$D_k = \sum_{i=1}^{k} d_i$，則 $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$，

且 $D_k = \sum_{i=1}^{k} a_i - (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i - (2^k - 1) \ge 0$．於是

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i \\ &= c_1 D_1 + c_2 (D_2 - D_1) + \cdots + c_n (D_n - D_{n-1}) \\ &= (c_1 - c_2) D_1 + (c_2 - c_3) D_2 + \cdots + (c_{n-1} - c_n) D_{n-1} + c_n D_n \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

這就證明了

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

容易驗證集合 $S = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ 滿足題設條件，且

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

綜上所述，所求最大值是 $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（二）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時(16：00～18:00)。

(2) 配分：每題 35 分。

(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 不可使用電算器。

(5) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：試求所有整數 m,n,p,q 使得 $m^2-n^2+2pq=0$ 且 $p^2-q^2+2mn=0$

【問題二】：設 $A=\left\{n \,\middle|\, n \text{為} 234^{567} \text{的正因數}\right\}$，考慮滿足下列條件的所有 A 之子集合 B;

B 中每一元素都不能整除 B 中其它的元素。

試問這樣的子集合 B 中的元素個數最多有幾個？

【問題三】：考慮所有頂點在單位球上的 ΔABC，其中 $A(a_1,b_1,c_1), B(a_2,b_2,c_2)$

$C(a_3,b_3,c_3)$ 滿足：$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$.

定義 ΔABC 的理想度數為：

$$f(\Delta ABC)=\max\{t_{12},t_{13}\}+\max\{t_{21},t_{23}\}+\max\{t_{31},t_{32}\}$$

其中 $t_{ij}=1+a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j$，$\forall\ i,j=1,2,3$

(1) 試求 $f(\Delta ABC)$ 的最小值.

(2) 試找出理想度數 $f(\Delta ABC)$ 有最小值的所有可能之 ΔABC.

(註：$\max\{x,y\}$ 表示 x 與 y 中較大的數)

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（二）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

由題意可知

$$n^2-m^2=2pq \qquad (1)$$

$$q^2-p^2=2mn \qquad (2)$$

由(1)可知m和n的奇偶性相同..若m和n都是奇數，令$m=2m_1+1, n=2n_1+1$

其中m_1和n_1為整數.代回(1)可得$4(n_1^2+n_1-m_1^2-m_1)=2pq$.

由(2)可知p和q的奇偶性相同..因此p和q都是偶數，令$p=2p_1, q=2q_1$

代回(2)可得$4(q_1^2-p_1^2)=2mn$..這與m和n都是奇數矛盾，因此m和n皆為偶數.

同理p和q也都是偶數..令$m=2m_1, n=2n_1, p=2p_1, q=2q_1$並代回(1)和(2)，可得

$$n_1^2-m_1^2=2p_1q_1 \qquad (3)$$

$$q_1^2-p_1^2=2m_1n_1 \qquad (4)$$

同理m_1, n_1, p_1, q_1也都是偶數.重覆此方法到最後可得m, n, p, q中至少有一者為0

當$m=0$，則可得$p=\pm q$因此$n^2=\pm 2p^2$，即$n=p=q=0$，類似地，當$n=0$或$p=0$

或$q=0$時，也可得$m=n=p=q=0$.所以滿足題目的整數解為$m=n=p=q=0$.

[問題二] 參考解答：

$\because 234=2\times 3^2\times 13$，所以$A=\left\{2^a\cdot 3^b\cdot 13^c \mid 0\le a\le 567, 0\le b\le 1134, 0\le c\le 567\right\}$.

令$B=\left\{2^a\cdot 3^{1134-a-c}\cdot 13^c \mid 0\le a\le 567,\ 0\le c\le 567\right\}$.

$\because 0\le a\le 567,\ 0\le c\le 567$，$\therefore 0\le 1134-a-c\le 1134$；因而$B$為$A$的一個子集合.

由於a, c各有568種可能值，所以B含有$568^2=322624$個元素.若**B**中有兩個元素

$2^a\cdot 3^{1134-a-c}\cdot 13^c, 2^i\cdot 3^{1134-i-j}\cdot 13^j$使得$2^i\cdot 3^{1134-i-j}\cdot 13^j \mid 2^a\cdot 3^{1134-a-c}\cdot 13^c$，

則 $1134-a-c\ge 1134-i-j$； (1)

$a\ge i$； (2)

$c\ge j$. (3)

由(1)又可得 $i+j\ge a+c$. (4)

由(2), (3), (4)可知：$a=i, c=j$，因此B中的每一個元素都不能整除B中的其他元素.

設C為A的子集合，**C**中元素的個數多於568^2.因為當$0\le a\le 567,\ 0\le c\le 567$時，至多有$568^2$個相異的數對$(a,c)$，所以由鴿籠原理：$C$中必有兩個形如$2^{a_1}\cdot 3^{b_1}\cdot 13^{c_1}$，$2^{a_2}\cdot 3^{b_2}\cdot 13^{c_2}$的元素，其中$a_1=a_2, c_1=c_2$，但$b_1\ne b_2$.此時，這兩個元素其中一個可被另一個整除；即集合**C**不滿足所要求的條件，故滿足條件的子集合之元素的個數至多有$\mathbf{568^2}$個。

[問題三] 參考解答：

(1) 令$S_{ij}=a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j$ 則

$$f(\Delta ABC)=\sum_{i=1}^{3}\max_{j\neq i}(1+S_{ij})=3+\sum_{i=1}^{3}\max_{j\neq i}S_{ij}$$

$$\geq 3+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{3}S_{ij}-S_{ii}) \qquad \because \text{最大數} \geq \text{平均數}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}S_{ij} \qquad \because S_{ii}=1,\forall i=1,2,3$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}((\sum_{i=1}^{3}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{3}b_i)^2+(\sum_{i=1}^{3}c_i)^2)\geq\frac{3}{2}$$

$$(\because \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}S_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j)=\sum_{i=1}^{3}\vec{u}_i\cdot\sum_{j=1}^{3}\vec{u}_j=\left\|\sum\vec{u}_i\right\|^2\geq 0$$

其中$\vec{u}_i=(a_i,b_i,c_i)\ \forall i$

(2) "="成立 $\Leftrightarrow S_{ij}=$常數$k,\forall i\neq j$且$\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3=0$，且$\left\|\vec{u}_i-\vec{u}_j\right\|^2=2-2k\ \ \forall i\neq j$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$為重心在原點的正三角形

陸、口試試題及參考解答

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試試題

【問題一】：試問是否存在正整數 n，同時滿足下列各條件：

1. n 的各個位數的數字都相異，n^2 的各個位數的數字都相異，n^3 的各個位數的數字都相異，
2. n，n^2，n^3 這三個數的所有位數的數字都不重複，而且正好是由 $0,1,2,\cdots,9$ 這十個數字所組成。

試說明理由。

【問題二】：令 ΔXYZ 的面積記為 $a\Delta XYZ$ ，試證：四邊形 $ABCD$ 為梯形的充要條件為

$$a\Delta ABC \times a\Delta ACD = a\Delta ABD \times a\Delta BCD$$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試【參考解答】

[問題一]參考解答：

假設正整數 n 滿足所需的條件 ，

(1) 若 n 為一位數 ，$\therefore n^2$ 最多為 2 位數 ，n^3 最多為 3 位數

$\therefore n, n^2, n^3$ 的所有數字最多有 $1+2+3=6<10$ 。 (不合)

(2) 若 n 為至少三位數 ，$\therefore n^2$ 為至少五位數 ，且 n^3 為至少七位數 ，

$\therefore n, n^2, n^3$ 的所有數字至少有 $3+5+7=15>10$ ，與題意不合 。

因此 ，n 必為二位數 。若 n^2 為四位數 $\therefore n^3$ 為至少五位數 ，

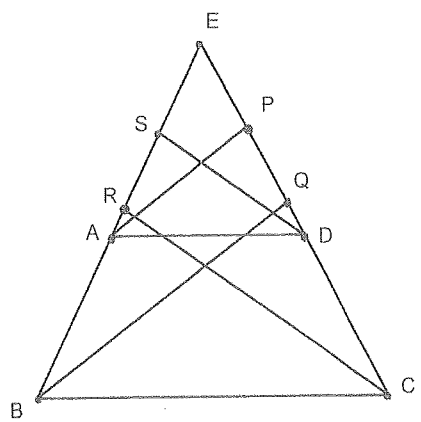
$\therefore n, n^2, n^3$ 的所有數字至少有 $2+4+5=11>10$ ，與題意不合 。

$\therefore 10 \le n < 100$ ，$100 \le n^2 < 1000$ ，$10000 \le n^3 < 10^5$

因此 ，由上式知 $10 \le n \le 31$ ，且 $22 \le n \le 46$ $\therefore 22 \le n \le 31$ 。

但這種 n 值不能滿足題意 。故得證 。

[問題二]參考解答：



$$a\Delta ABC \cdot a\Delta ACD = a\Delta ABD \cdot a\Delta BCD$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}\cdot\overline{CR}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AP} = \overline{AB}\cdot\overline{DS}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BQ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CR}:\overline{DS} = \overline{BQ}:\overline{AP} \qquad (*)$$

因為 $\Delta ESD \approx \Delta ERC$ ，所以 $\overline{CR}:\overline{DS} = \overline{CE}:\overline{DE}$ (1)

因為 $\Delta EAP \approx \Delta EBQ$ ，所以 $\overline{BQ}:\overline{AP} = \overline{BE}:\overline{AE}$ (2)

$ABCD$ 為梯形 $\Leftrightarrow \Delta AED \approx \Delta BEC$ ，

然而 $\Delta AED \approx \Delta BEC$ ，若且唯若 $\overline{BE}:\overline{AE} = \overline{CE}:\overline{DE}$ (3)

若 $ABCD$ 為梯形 ，則 (3) 成立 。 由 (1)，(2)，(3) 可得

$$\overline{CR}:\overline{DS} = \overline{CE}:\overline{DE} = \overline{BE}:\overline{AE} = \overline{BQ}:\overline{AP} \qquad (4)$$

所以 (*) 成立 ，因而 $a\Delta ABC \times a\Delta ACD = a\Delta ABD \times a\Delta BCD$ 。

反之 ，若 $a\Delta ABC \times a\Delta ACD = a\Delta ABD \times a\Delta BCD$ 成立 ，則 (*) 成立 。

由 (1)，(2)，(*) 可得 (4) 成立 ，因而 (3) 成立 ；由此可知 $ABCD$ 為梯形 。

教育部九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

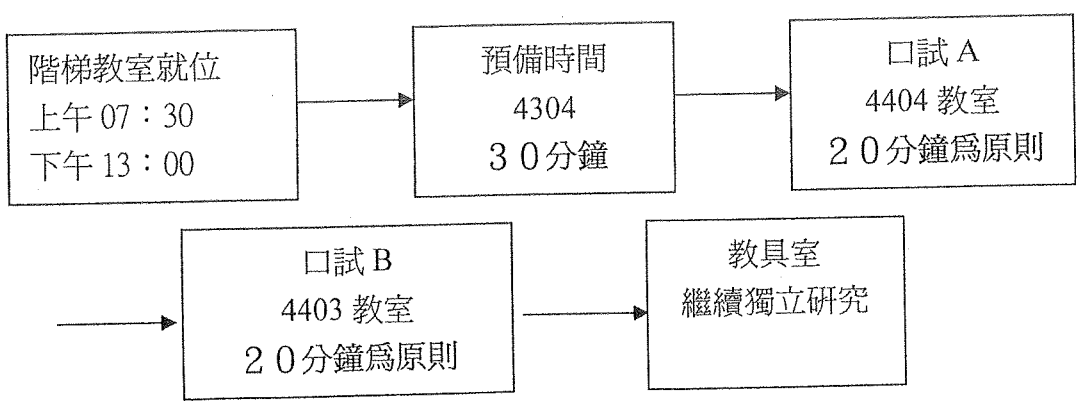
口試程序表

考生順序	（編號）	預備時間	口試A 4404 教室	口試B 4403 教室
1	93051	07：30	08：00	08：20
2	93006	07：50	08：20	08：40
3	93037	08：10	08：40	09：00
4	93013	08：30	09：00	09：20
5	93014	08：50	09：20	09：40
6	93034	09：10	09：40	10：00
7	93001	09：50	10：20	10：40
8	93045	10：10	10：40	11：00
9	93049	10：30	11：00	11：20
10	93005	10：50	11：20	11：40
11	93021	11：10	11：40	12：00

午　　餐

考生順序	（編號）	預備時間	口試A 4404 教室	口試B 4403 教室
12	93009	13：00	13：30	13：50
13	93016	13：20	13：50	14：10
14	93020	13：40	14：10	14：30
15	93028	14：00	14：30	14：50
16	93027	14：20	14：50	15：10
17	93054	14：40	15：10	15：30
18	93032	15：20	15：50	16：10
19	93044	15：40	16：10	16：30
20	93019	16：00	16：30	16：50
21	93041	16：20	16：50	17：10
22	93056	16：40	17：10	17：30

備註：口試流程



九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時。

(2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(3) 不可使用電算器。

(4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：任給在球面 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 上 n 個點.

證明：這些點之間距離的平方之總和小於或等於 n^2 。

【問題二】：設三角形 ABC 的三邊長分別為 a,b,c，且令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。已知 ΔABC 的面積為 1，試求 $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3$ 的最小值。

【問題三】：設 $a_1,a_2,\cdots,a_{2004}$ 都是正數。證明：

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{\sqrt{2}}\times\frac{a_2+a_3+a_4}{\sqrt{2}}\times\cdots\times\frac{a_{2004}+a_1+a_2}{\sqrt{2}}$$
$$\geq(a_1+a_2)\times(a_2+a_3)\times\cdots\times(a_{2004}+a_1)$$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

Sol：這 n 個點可由向量 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 來表示，且 $|v_i|=1$.

計算 $\sum_{1\le i<j\le n}|v_i-v_j|^2=\sum_{1\le i<j\le n}(v_i-v_j)\cdot(v_i-v_j)$

$$=(n-1)\sum_{1\le i\le n}v_i\cdot v_i-2\sum_{1\le i<j\le n}v_i\cdot v_j$$

$$=n\sum_{1\le i\le n}v_i\cdot v_i-(\sum_{1\le i\le n}v_i\cdot v_i+2\sum_{1\le i<j\le n}v_i\cdot v_j)$$

$$=n^2-(\sum_{1\le i\le n}v_i)\cdot(\sum_{1\le i\le n}v_i)$$

此外，等號成立 $\Leftrightarrow \sum_{1\le i\le n}v_i=0$

[問題二]參考解答：

Sol：

$$1=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$16=4a^2b^2(1-\cos^2 C)=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$

$$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=1$$

$$[(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3]^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\ge(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$$

$$\frac{(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3}{3}\ge(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$$

$$[(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3]^{\frac{4}{3}}\ge 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3\ge 3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$$

當 $a=b=c$ 時，三角形面積為 1 $\Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=\sqrt[4]{3}$$

[問題三] 參考解答：

Sol：足碼都 $\equiv n$。

$$4(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})^2=((2a_{i-1}+a_i)+(a_i+2a_{i+1}))^2$$
$$\geq 4(2a_{i-1}+a_i)(a_i+2a_{i+1})$$

即 $$(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})^2\geq(2a_{i-1}+a_i)(a_i+2a_{i+1}) \quad (1)$$

又 $$(2a_{i-1}+a_i)(2a_i+a_{i-1})\geq 2(a_{i-1}+a_i)^2 \quad (2)$$

二式相乘，得

$$(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})^2(2a_i+a_{i-1})\geq(a_i+2a_{i+1})\cdot 2\cdot(a_{i-1}+a_i)^2$$

代入 $i=1$，2，3，…，2004，2005

$$\Rightarrow\begin{cases}(a_1+a_2+a_3)^2(a_1+2a_2)\geq(a_2+2a_3)\cdot 2\cdot(a_1+a_2)^2\\(a_2+a_3+a_4)^2(a_2+2a_3)\geq(a_3+2a_4)\cdot 2\cdot(a_2+a_3)^2\\\vdots\\(a_{2004}+a_1+a_2)^2(a_{2004}+2a_{2005})\geq(a_1+2a_2)\cdot 2\cdot(a_{2004}+a_1)^2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 全部相乘，再開方即得。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時。

(2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(3) 不可使用電算器。

(4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：銳角 ΔABC 中，D, E 為 $\overline{BC}$ 邊上的三等分點，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$，$F$ 為 $\overline{AC}$ 邊上的點，$\overline{AF}=\frac{1}{3}\overline{AC}$，且 G 為 E 在 $\overline{AB}$ 邊上的垂足。

試證：若 $\overline{FE}\perp\overline{BC}$，則 A, G, D, C 四點共圓。

【問題二】：設 ΔABC 中，$\angle B=30°$ 且三邊長分別為 $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{AC}=b$，

試證：$b^2-c^2\le 2a^2$。

【問題三】：給定正整數 n，$\phi(n)$ 為小於 n 並與 n 互質的正整數之個數.

試證：對每個大於 3 的奇數 n，都存在一個與 n 互質的質數 p，

使得 $p\mid(2^{\phi(n)}-1)$.

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）【參考解答】

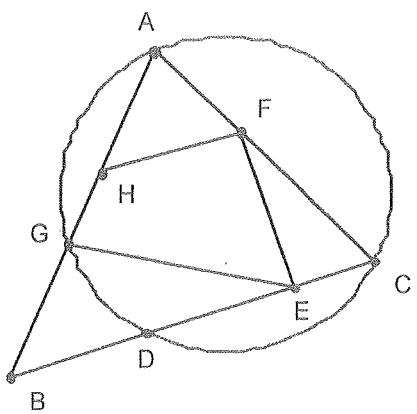
[問題一] 參考解答：

證明：過 F 一直線平行於 $\overline{BC}$ 而與 $\overline{AB}$ 相交於 H，因 $\overline{AF}=\frac{1}{3}\overline{AC}$，得

$\overline{HF}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{EC}=\overline{DE}$. 因此四邊形 $HECF$ 為平行四邊形，而四邊形 $HDEF$ 為矩形。

因 $\angle HGE$ 與 $\angle EFH$ 為直角，$HGEF$ 四點共圓 。 因此 $HDEF$ 四點共圓。

又由 $\overline{HE}\,//\,\overline{FC}$，故 $AGDC$ 四點共圓。



[問題二] 參考解答：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\sin 30^0$$
$$=a^2+c^2-\sqrt{3}ac$$

$$b^2-c^2-2a^2=-a^2-(a^2+c^2-b^2)=-(a^2+\sqrt{3}ac)\le 0$$

[問題三] 參考解答：

證明：事實上，若n的標準分解式為$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，其中$p_1, p_2, \cdots, p_k$為兩兩相異的質數，則$\phi(n)=\phi(p_1^{a_1})\cdot\phi(p_2^{a_2})\cdots\phi(p_k^{a_k})$。

另一方面，對每個質數p_i，

$$\phi(p_i^{a_i})=p_i^{a_i}-p_i^{a_i-1}=p_i^{a_i-1}(p_i-1),$$

因此$\phi(n)$可被2^k整除。換言之：$2^{\phi(n)}-1=N^{2^k}-1$,

其中N為一個大於3的偶數(因為$n>3$)。但

$$N^{2^k}-1=(N-1)\prod_{i=0}^{k-1}(N^{2^i}+1),$$

即$N^{2^k}-1$為$k+1$個兩兩互質整數的乘積。

所以$2^{\phi(n)}-1$至少有$k+1$個不同的質因數。證畢

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第一區（花蓮高中）　筆試(一)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：如下圖　(16 分)

A	B
b	a

利用鉛直線與水平線將矩形分割成面積依序為 A,a,B,b 的四個矩形。

1. 在何條件下，A,a,B,b 會滿足
$$a+A=b+B$$
2. 在何條件下，A,a,B,b 會滿足
$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$$
3. 在何條件下，A,a,B,b 會滿足
$$A-a=B-b$$
4. 在何條件下，A,a,B,b 會滿足
$$aA=bB$$

【問題二】：試找出一個能刻劃出所有滿足 $\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$ 的最簡分數 $\frac{a}{b}$ 的通式。滿足條件 $\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$ 中分母最小的一個最簡分數為何？證明你的答案。　(16 分)

【問題三】：設 a_n, b_n 均為等差數列，前 n 項之和分別為 A_n, B_n，如果對於每個 n 均有 $\frac{A_n}{B_n}=\frac{3n-3}{2n+3}$，試求 $\frac{a_{16}}{b_{16}}$ 之值為何？　(17 分)

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第一區（花蓮高中）　筆試(一)【參考解答】

【問題一】

令大矩形的長被鉛直線分成長度為 p 與 q 的兩個線段；寬被水平線分成長度為 r 與 s 的兩個線段。此時，$A=pr, a=qs, B=qr, b=ps$。

(1) 由題意知

$$\begin{aligned} qs+pr=ps+qr &\Rightarrow q(s-r)=p(s-r)\\ &\Rightarrow (p-q)(s-r)=0\\ &\Rightarrow p-q=0 \text{ 或 } s-r=0\\ &\Rightarrow p=q \text{ 或 } s=r. \end{aligned}$$

故當鉛直線或水平線平分大矩形面積時，等式

$$a+A=b+B$$

成立。

(2) 由題意知

$$\begin{aligned} \frac{pr}{qs}=\frac{qr}{ps} &\Rightarrow q^2=p^2\\ &\Rightarrow (q+p)(q-p)=0\\ &\Rightarrow q=p. \end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$$

成立。

(3) 由題意知

$$\begin{aligned} pr-qs=qr-ps &\Rightarrow p(s+r)=q(s+r)\\ &\Rightarrow q=p \end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$A-a=B-b$$

成立。

(4) 由題意知

$$qs\cdot pr=ps\cdot qr \Rightarrow 0=0.$$

故無論鉛直線或水平線為何，等式

$$aA=bB$$

恆成立。

【問題二】

試找出一個能刻劃出所有滿足$\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$的分數$\frac{a}{b}$的通式。滿足條件$\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$中分母最小的一個分數為何？證明你的答案。

解：(1) 因對於所有的正整數 m,n 恆滿足$\frac{23}{41}<\frac{23m+32n}{41m+57n}<\frac{32}{57}$，反之，

設$\frac{a}{b}$滿足$\frac{23}{41}<\frac{a}{b}<\frac{32}{57}$，取m=41a-23b，n=32b-57a，則m,n均為正整數，且 32m+23n=32×41a-23×51a=a，57m+41n=−57×23b+41×32b=b，

即 $\frac{b}{a}=\frac{23m+32n}{41m+57n}$

(2) 取 m=1，n=1 時$\frac{b}{a}=\frac{23+32}{41+57}=\frac{55}{98}$為最簡分數且分母最小。

【問題三】

設a_n, b_n均為等差數列，前 n 項之和分別為A_n, B_n，如果對於每個 n 均有

$\frac{A_n}{B_n}=\frac{3n-3}{2n+3}$，試求 $\frac{a_{16}}{b_{16}}$之值為何？

解：(1) 設$a_n=a_1+(n-1)d, b_n=b_1+(n-1)e$，則

$$\frac{3n-3}{2n+3}=\frac{A_n}{B_n}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{n[2b_1+(n-1)e]}=\frac{dn+2a_1-d}{en+2b_1-e}, \forall n$$

故知 d=3r，e=2r

(2) 將 n=1 代入得 $\frac{0}{5}=\frac{A_1}{B_1}=\frac{a_1}{b_1}\Rightarrow a_1=0$

將 n=2 代入得 $\frac{3}{7}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=\frac{3r}{b_1+(b_1+2r)}\Rightarrow b_1=\frac{5r}{2}$

(3) 因此$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+(n-1)d}{b_1+(n-1)e}=\frac{0+(n-1)3r}{\frac{5r}{2}+(n-1)2r}=\frac{6(n-1)r}{5r+4(n-1)r}=\frac{6n-6}{4n+1}$

因而$\frac{a_{16}}{b_{16}}=\frac{6\times16-6}{4\times16+1}=\frac{90}{65}=\frac{18}{13}$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第一區（花蓮高中）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

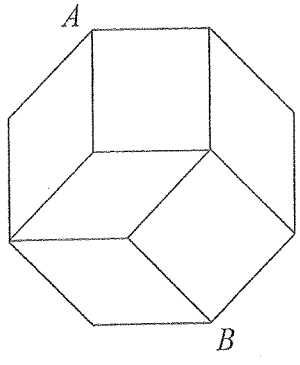
1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1、設N為自然數所成之集合，定義函數$f:N\to N$為

$$f(n)=\begin{cases} n+3, n\text{為奇數} \\ \dfrac{n}{2}, n\text{為偶數} \end{cases}$$

若k為奇數且滿足$f(f(f(k)))=27$，求$k=$＿＿(一)＿＿。

2、如下圖所示，由兩個全等的正方形與四個一樣的平行四邊形所鋪成的八邊形為正八邊形。若正方形的邊長為1，則對角線AB的長度為何？＿＿(二)＿＿。



3 設不論m的值為何，直線$y=mx+b$均與圓錐曲線$x^2+2y^2=8$相交，則b的範圍為＿＿。

4 牛奶保鮮時間因儲藏時的溫度不同而不同。若牛奶放在0℃的冰箱中，保鮮時間是200小時，而在24℃的廚房中是25小時。假定保鮮時間y（小時）與儲藏溫度x（℃）的函數關係是$y=a\cdot b^x$（a,b是常數）。求溫度在32℃時的保鮮時間。

答：＿＿(四)＿＿小時。

5 設 a 為正數，$f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，則 $f(\frac{1}{2004})+f(\frac{2}{2004})+\ldots+f(\frac{2003}{2004})$ 之值為____（五）____。

6 正四面體的容器裝了一些水，當正四面體的一個面放置於水平桌面時，容器內水高為容器高的 $\frac{1}{2}$，現將它上下倒置後水位高為容器高的____（六）____倍。

7 根據愛因思坦的相對論，在高速運動的物體上，當地球上過去 1 秒時，高速運動的太空船才只過去了

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\text{秒，}$$

這裡的常數 c 是光的速度，其值為 $c=30$（萬公里／秒）；而 v（萬公里／秒）是太空船的速度。一位 28 歲的太空人，搭乘速度為 28.8（萬公里／秒）的太空船飛向外太空，出發當天，太空人的太太剛好產下他們的第一個孩子。當太空船返回地球時，發現他們的孩子剛好 50 歲。問：此時太空人的年紀幾歲？答：____（七）____歲。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第一區（花蓮高中）　筆試(二)【參考解答】

編號：＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答案欄

(一)	(二)	(三)	(四)
105	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$-2 \le b \le 2$	12.5
(五)	(六)	(七)	
$\frac{2003}{2}$	$\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$	42	

總計：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第二區（板橋高中）　筆試(一)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：設 a,b,c 為某三角形之三邊長，試證：

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$$ 。（16 分）

【問題二】：在 $\triangle ABC$ 中，點 D 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AD}=2\overline{BD}$，又點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點。若 $\angle ACD=\angle BEC$，試證：$\triangle ABC$ 是直角三角形。（16 分）

【問題三】：設 n 為自然數，試證：在任意 3^n 個正整數中，必存在 2^n 個數的和是 2^n 的倍數。（17 分）

填)

【問題一】：設 a,b,c 為某三角形之三邊長，試證：

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)\text{。(16 分)}$$

【證法一】：展開並簡化此不等式如下：

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 > 2a^4+2b^4+2c^4$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2 < 0 \qquad \text{---------(*)}$$

因式分解不等式 (*)，得到

$$[a^2-(b+c)^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]$$
$$=[a+(b+c)]\cdot[a-(b+c)]\cdot[a+(b-c)]\cdot[a-(b-c)]$$
$$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) < 0$$

\+　　-　　+　　+

17

（因為 a,b,c 為任一三角形之三邊長，所以 a,b,c 滿足 $\begin{cases} a+b+c>0 \\ a-b-c<0 \\ a+b-c>0 \\ a-b+c>0 \end{cases}$，不等式得證。）

【證法二】：展開並簡化此不等式如下：

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2>2a^4+2b^4+2c^4$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2<0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2)<0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0 \quad \text{----------(*)}$$

由上可知，欲證此不等式成立，即等價於證明不等式（*）成立。

令 $x=a^2$ ，並考慮下列一元二次方程式：

$$x^2-2(b^2+c^2)x+(b^2-c^2)^2=0 \quad \text{---------- (**)}$$

其兩根分別為 $x_1=(b+c)^2$ ，和 $x_2=(b-c)^2$

由觀察不等式（*）和一元二次方程式（**）得知：

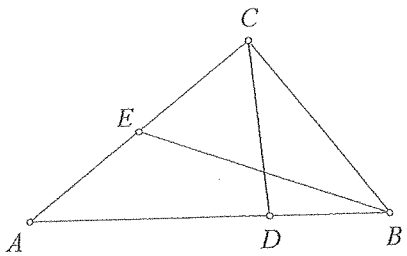
不等式（*）成立 $\Leftrightarrow (b-c)^2<x<(b+c)^2$

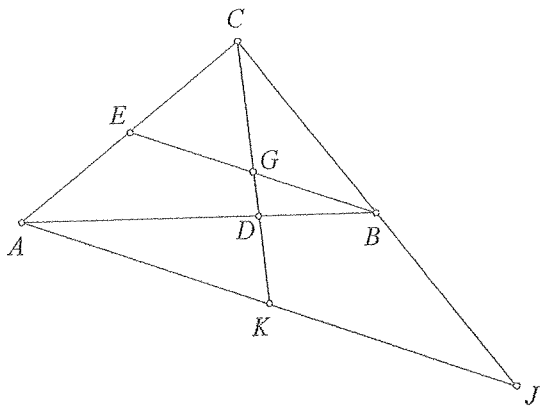
$$\Leftrightarrow (b-c)^2<a^2<(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow |b-c|<a<b+c \quad \text{----------(***)}$$

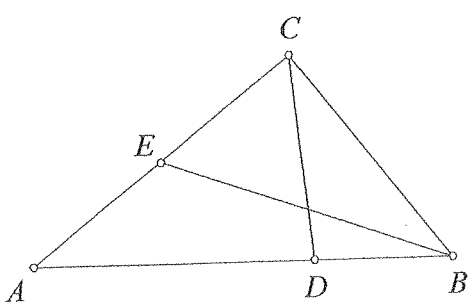
因為 a,b,c 為任一三角形之三邊長，所以（***）必成立。

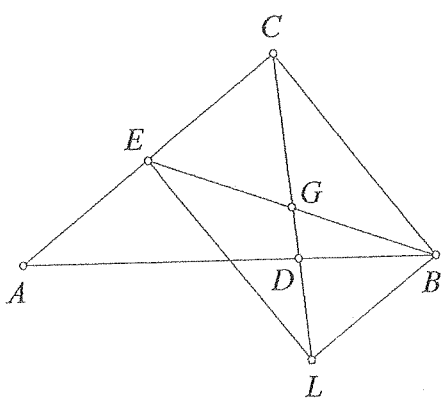
因此，不等式（*）亦成立，亦即欲證之不等式成立。





【證法三】：設$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於點G。在$\overrightarrow{BC}$的相反射線上選取點J使得$\overline{BC}=\overline{BJ}$，設$\overline{AJ}$與直線$CD$相交於點$K$。因為$\overline{AB}$是$\triangle ACJ$的一條中線，而且$\overline{AD}=2\overline{DB}$，所以，點$D$是$\triangle ACJ$的重心。於是，$\overline{CK}$是$\triangle ACJ$的另一條中線，點$K$是$\overline{AJ}$的中點。因為$B$與$E$分別為$\overline{AC}$與$\overline{CJ}$的中點，所以，$\overline{BE}$與$\overline{AJ}$平行。於是，由$\overline{AK}=\overline{KJ}$可得$\overline{GB}=\overline{GE}$，點$G$是$\overline{BE}$的中點。‖





【證法四】：設$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於點G。過點B作$\overline{AC}$的平行線與直線CD相交於點L。因為$\overline{AC}$與$\overline{BL}$平行，所以，$\triangle ACD$與$\triangle BLD$相似。於是，由$\overline{AD}=2\overline{DB}$可得$\overline{AC}=2\overline{BL}$。由此可知：

$$\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{BL}\text{。}$$

因為四邊形$BCEL$有一組對邊平行且等長，所以，$BCEL$是平行四邊形。於是，兩對角線$\overline{BE}$與$\overline{CL}$的交點G是$\overline{BE}$的中點，$\overline{GB}=\overline{GE}$。‖

【問題三】：設n為自然數，試證：在任意3^n個正整數中，必存在2^n個數的和是2^n的倍數。

（17分）

解：

(i) 當$n=1$時，在任意3個正整數x,y,z中，必有兩個數有相同的奇偶性，其和為2的倍數。

(ii) 當$n=k$時，假設命題成立，即：在任意3^k個正整數中，必存在2^k個數，其和是2^k的倍數。

當$n=k+1$時，對任意3^{k+1}個正整數，先平分成三堆，每一堆各有3^k個正整數。依歸納假設，每堆各存在2^k個數，其和是2^k的倍數。

可設第一堆中的2^k個數之和為$S_1=2^k x$，第二堆中的2^k個數之和為$S_2=2^k y$，

第三堆中的2^k個數之和為$S_3=2^k z$，其中x,y,z為正整數。

因x,y,z中，必有兩個數有相同的奇偶性；不失一般性，設x,y同為奇數或同為偶數，則$x+y$是2的倍數，可令$x+y=2m$。

因此，第一堆和第二堆中，一共找出的$2^k+2^k=2^{k+1}$個數之和等於$S_1+S_2=2^k x+2^k y=2^{k+1}m$為$2^{k+1}$的倍數。得證。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第二區（板橋高中）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1、方程式$\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$的解為 ＿＿(一)＿＿。

2、定義兩正數如下：

$$a=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{2003\times 2004},$$

$$b=\frac{1}{1003\times 2004}+\frac{1}{1004\times 2003}+\frac{1}{1005\times 2002}+\cdots+\frac{1}{2004\times 1003},$$

則$\frac{a}{b}=$＿＿(二)＿＿。(化成最簡分數)

3、設a,b為實數，若函數$f(x)=(a\cos x+b\sin x)\cos x$有最大值3及最小值$-1$，

則a之值為 ＿＿(三)＿＿。

4、設圓O是$\triangle ABC$的內切圓，切點P,Q,R分別在$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$上。若$\overline{AP}=x,\overline{BQ}=y,$

$\overline{CR}=z$，則圓O的半徑為＿＿(四)＿＿。(以x,y,z表示)

5、若u,v,w,x,y,z能使下圖各行、各列及兩個對角線的和都相等。則$uvw=$＿＿(五)＿＿。

2	3	x
5	y	u
z	v	w

6、若拋物線$y=x^2+k$與橢圓$9x^2+16y^2=144$有四個相異交點，則常數k的範圍為

＿＿(六)＿＿。

7、觀察以下數列的規律：

$$0,1,-1,2,3,-2,4,5,6,-3,7,8,9,10,-4,11,12,13,14,15,-5,\ldots.$$

則第2004項為＿＿(七)＿＿。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第二區（板橋高中）　筆試(二)【參考解答】

編號：＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答案欄

（一）	（二）	（三）	（四）
$x=3\sqrt{21}$ 或 $x=-3\sqrt{21}$ （只對一個得2分）	$\frac{3007}{2}$	2	$\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$
（五）	（六）	（七）	
12	$-\frac{1033}{64}<k<-3$ （全對才給分）	1942	

總計：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第三區（成功高中）　筆試(一)試題

編號：＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：給定一矩形 $ABCD$ 以及分別在邊 $\overline{BC}$ 上、邊 $\overline{CD}$ 上的各一點 E、F。設 $\triangle ABE$、$\triangle AEF$ 與 $\triangle AFD$ 的面積分別為 α、β 與 γ。

(1)令 $\overline{BE}=a$，$\overline{EC}=b$、$\overline{CF}=c$、$\overline{FD}=d$，試以 a、b、c 與 d 表示 $\triangle AEF$ 的面積 β。(5 分)

(2)試以 α、β 與 γ 表示矩形 $ABCD$ 的面積（不能含 a、b、c、d）。(8 分)

問題二：試求出滿足下述兩方程式的所有數對 (x,y)，其中 $x>0$ 而 $0\le y<2\pi$：

$$\cos y+\frac{1}{4}\cos 4y=x\cos y\ ,$$

$$\sin y-\frac{1}{4}\sin 4y=x\sin y\ 。\ (12\text{ 分})$$

問題三：(1)試證：存在兩個正整數 a 與 b 滿足 $a^2-b^2=101$。(4 分)

(2)試求滿足下述條件的正整數 n 之最小值：在任意 n 個（$n\ge 2$）相異的正整數中，必存在兩相異數 a 與 b 使得 a^2-b^2 是 101 的倍數。(8 分)

問題四：設 $\triangle ABC$ 的內部有一點 D 滿足 $\angle CAD=\angle ACB$，過點 D 作一直線與 $\overline{AB}$ 平行，過頂點 B 作一直線與 $\overline{AC}$ 平行，設所作二直線相交於點 E。在 $\overline{BC}$ 上選取一點 F 使得 $\angle DFE=\angle ACB$ 且點 F 與點 E 在直線 AD 的異側。試證：$\triangle ABC$ 的外接圓與 $\triangle DEF$ 的外接圓相切。(12 分)

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

北區　第三區（成功高中）　　筆試(一)【參考解答】

問題一：

給定一矩形 $ABCD$ 及分別在邊 $\overline{BC}$ 上、邊 $\overline{CD}$ 上的各一點 E、F。設△ABE、△AEF 與△AFD 的面積分別爲 α、β 與 γ。

(1)令 $\overline{BE}=a$，$\overline{EC}=b$、$\overline{CF}=c$、$\overline{FD}=d$，試以 a、b、c 與 d 表示△AEF 的面積 β。(5 分)

(2)試以 α、β 與 γ 表示矩形 $ABCD$ 的面積 (不能含 a、b、c、d)。(8 分)

解：(1)因爲矩形 $ABCD$ 的面積爲 $(a+b)(c+d)$，△ABE、△CEF 與△AFD 的面積分別爲 $a(c+d)/2$、$bc/2$ 與 $d(a+b)/2$，所以，可得

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)/2+bc/2+d(a+b)/2+\beta\ 。$$

由此可得

$$\beta=\frac{1}{2}[2(a+b)(c+d)-a(c+d)-bc-d(a+b)]$$

$$=\frac{1}{2}(ac+bc+bd)\ 。$$

(2)令 x 表示矩形 $ABCD$ 的面積。因爲

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{a(c+d)}{2}\\ \beta=\dfrac{ac+bc+bd}{2}\\ \gamma=\dfrac{d(a+b)}{2}\end{cases},$$

所以，可得

$$x=(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd=2\beta+ad=2\beta+\frac{2\alpha}{c+d}\cdot\frac{2\gamma}{a+b}$$

$$=2\beta+\frac{4\alpha\gamma}{x}\ 。$$

移項、化簡、解方程式，即得

$$x^2-2\beta x-4\alpha\gamma=0\ ,$$

$$x=\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}\ 。$$

因爲 $x>0$，所以，$x=\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}$。‖

問題二：

試求出滿足下述兩方程式的所有數對(x,y)，其中$x>0$而$0\le y<2\pi$：

$$\cos y+\frac{1}{4}\cos 4y=x\cos y\ ,$$

$$\sin y-\frac{1}{4}\sin 4y=x\sin y\ 。\quad (12\text{分})$$

解：將第一式乘以$\sin y$、第二式乘以$\cos y$、相減，即得

$$\sin y\cos 4y+\sin 4y\cos y=0\ ,$$

$$\sin 5y=0\ 。$$

由此得

$$y=\frac{k\pi}{5}\ ,\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\ 。$$

當k是奇數$2n+1(n=0,1,2,3,4)$，$4y+y=(2n+1)\pi$。因此，得

$$\cos 4y=-\cos y\ ,\ \sin 4y=\sin y\ ,\ x=\frac{3}{4}\ 。$$

因此，在此情形中，所求數對爲

$$(x,y)=(\frac{3}{4},\frac{\pi}{5}),(\frac{3}{4},\frac{3\pi}{5}),(\frac{3}{4},\frac{5\pi}{5}),(\frac{3}{4},\frac{7\pi}{5})\text{或}(\frac{3}{4},\frac{9\pi}{5})\ 。$$

當k是偶數$2n(n=0,1,2,3,4)$，$4y+y=2n\pi$。因此，得

$$\cos 4y=\cos y\ ,\ \sin 4y=-\sin y\ ,\ x=\frac{5}{4}\ 。$$

因此，在此情形中，所求數對爲

$$(x,y)=(\frac{5}{4},0),(\frac{5}{4},\frac{2\pi}{5}),(\frac{5}{4},\frac{4\pi}{5}),(\frac{5}{4},\frac{6\pi}{5})\text{或}(\frac{5}{4},\frac{8\pi}{5})\ 。\ \|$$

問題三：

(1)試證：存在兩個正整數 a 與 b 滿足 $a^2-b^2=101$。(4 分)

(2)試求滿足下述條件的正整數 n 之最小值：在任意 n 個 $(n\geq 2)$ 相異的正整數中，必存在兩相異數 a 與 b 使得 a^2-b^2 是 101 的倍數。(8 分)

證：(1)因爲 101 是質數，所以，由 $(a+b)(a-b)=101$ 可得 $a+b=101$ 且 $a-b=1$。解得：$a=51$，$b=50$。

(2)因爲 101 是質數，所以，由 101 整除 $(a+b)(a-b)$ 可知 101 整除 $(a-b)$ 或 101 整除 $(a+b)$。101 整除 $(a-b)$ 表示將 a 與 b 分別除以 101，所得的餘數相等；

101 整除 $(a+b)$ 表示將 a 與 b 分別除以 101，所得的餘數之和等於 101。

因爲由 51 至 101 的五十一個正整數中，任何兩相異數的和與差都不是 101 的倍數，所以，滿足本題所述條件的正整數 n 必大於 51。我們將證明滿足本題所述條件的正整數 n 之最小值爲 52。

設 $a_1,a_2,\cdots,a_{52}$ 是任意 52 個相異正整數，對每個 $i=1,2,\cdots,52$，令 r_i 表示 a_i 除以 101 的餘數，又令

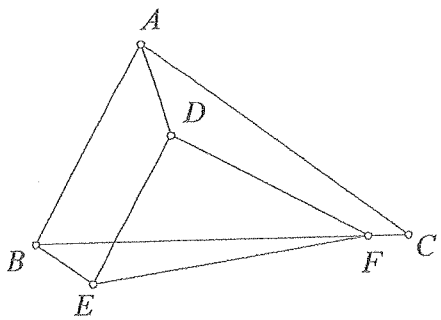
$$s_i=\begin{cases} r_i, & \text{若 } 0\leq r_i\leq 50; \\ 101-r_i, & \text{若 } 51\leq r_i\leq 100; \end{cases}$$

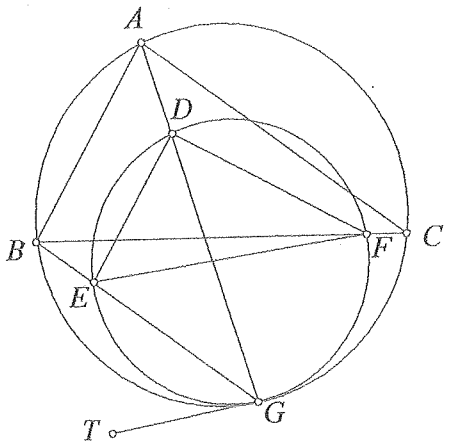
則 $s_1,s_2,\cdots,s_{52}$ 等 52 個整數都屬於集合 $\{0,1,2,\cdots,50\}$。因爲此集合只有 51 個元素，所以，依鴿籠原理知：必存在一對 i 與 j $(1\leq i<j\leq 52)$ 使得 $s_i=s_j$。由此進一步得 $r_i=r_j$ 或 $r_i+r_j=101$。不論是哪一種情形，都可得 $101\mid (r_i+r_j)(r_i-r_j)$，

$101\mid (a_i+a_j)(a_i-a_j)$，亦即：$a_i^2-a_j^2$ 是 101 的倍數。‖

問題四：

在△ABC 的內部選取一點 D 使得 $\angle CAD = \angle ACB$ ，過點 D 作一直線與 $\overline{AB}$ 平行，過頂點 B 作一直線與 $\overline{AC}$ 平行，設兩平行線相交於點 E。在 $\overline{BC}$ 上選取一點 F 使得 $\angle DFE = \angle ACB$ 且點 F 與點 E 在直線 AD 的異側。試證：△ABC 的外接圓與△DEF 的外接圓相切。(12 分)





證：設直線 AD 與 BE 相交於點 G。因為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BG}$ 平行，所以，$\angle AGB = \angle CAD$。再依 $\angle CAD = \angle ACB$ 的假設，可得

$$\angle AGB = \angle CAD = \angle ACB \text{。}$$

於是，A、B、G 與 C 四點共圓。另一方面，依 $\angle DFE = \angle ACB$ 的假設，可得

$$\angle DFE = \angle ACB = \angle AGB = \angle DGE \text{。}$$

於是，D、E、G 與 F 四點共圓。由此可知：△ABC 的外接圓與△DEF 的外接圓相交於點 G。

設直線 GT 是△ABC 的外接圓過點 G 的切線，其中點 T 與點 B、點 E 在直線 AD 的同側。依弦切角定理，可知 $\angle GAB = \angle BGT$。另一方面，因為 $\overline{DE}$ 與 $\overline{AB}$ 平行，所以，$\angle GAB = \angle GDE$。於是，可得

$$\angle GDE = \angle GAB = \angle BGT = \angle EGT \text{。}$$

依弦切角定理，可知直線 GT 與△DEF 的外接圓相切於點 G。因此，△ABC 的外接圓與△DEF 的外接圓相切於點 G。‖

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第三區（成功高中）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1、在實驗室做球的反彈試驗，當乒乓球從60公分高的地方自然落下，第一次反彈的高度為48公分，接下來都是以相同的比例反彈。試問在第＿＿（一）＿＿次反彈後，其高度會低於6公分。（$\log 2 = 0.3010\cdots$，$\log 3 = 0.4771\cdots$。）

2、已知$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) = -\frac{4}{5}$，其中$\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$，則$\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha) =$＿＿（二）＿＿。

3、試寫出滿足方程組

$$\begin{cases} A+\ B+\ C = 93 \\ \frac{4}{5}A+\frac{5}{6}B+\frac{6}{7}C = 79 \end{cases}$$

的所有正整數組(A, B, C)：＿＿（三）＿＿。

4、在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，$\overline{AB} = \overline{DE}$、$\overline{AC} = 2$、$\overline{DF} = 5$、$\angle B + \angle E = 180^\circ$且$\angle C + \angle F = 120^\circ$，則$\overline{BC} + \overline{EF} =$＿＿（四）＿＿。

5、設$\angle BAC = 45^\circ$，而X為其內部一點且$\overline{AX} = 6$，在射線$\overrightarrow{AB}$與射線$\overrightarrow{AC}$上分別取異於角頂A的一點Y與Z，並使X、Y、Z三點不共線，則$\triangle XYZ$的周長之最小值為＿＿（五）＿＿。

6、滿足$1 \le a \le b < c \le d \le 15$的整數組$(a,b,c,d)$共有＿＿（六）＿＿組。。

7、若下列二拋物線的兩交點的連線通過原點，則兩交點坐標為＿＿（七）＿＿。

$y = x^2 + a$，$y = -x^2 + 4x + 3$。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

北區　第三區（成功高中）　筆試(二)【參考解答】

1.在實驗室做球的反彈試驗，當乒乓球從 60 公分高的地方自然落下，第一次反彈的高度爲 48 公分，接下來都是以相同的比例反彈。試問在第_____次反彈後，其高度會低於 6 公分。($\log 2 = 0.3010\cdots$，$\log 3 = 0.4771\cdots$。)

解：依題意可知：乒乓球的反彈比例是 $48/60 = 4/5$。假設在第 n 次反彈後，其高度低於 6 公分，則可得 $60(4/5)^n < 6$。此式可利用對數求解如下：

$$60(\frac{4}{5})^n < 6 ,$$

$$(\frac{4}{5})^n < \frac{1}{10} ,$$

$$n(\log 5 - \log 4) > 1 ,$$

$$n(1 - 3\log 2) > 1 ,$$

$$n > \frac{1}{1 - 3\log 2} 。$$

因爲 $0.3010 < \log 2 < 0.3011$，所以，$0.0967 < 1 - 3\log 2 < 0.0970$，且

$$10 < \frac{1}{0.0970} < \frac{1}{1 - 3\log 2} < \frac{1}{0.0967} < 11 。$$

由此可知：乒乓球在第 11 次反彈後，其高度才會低於 6 公分。‖

2.已知 $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\frac{4}{5}$，其中 $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則 $\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=$_____。

解：因爲 $\sin(\pi/4+\alpha)=-4/5$，所以，可得

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-4\sqrt{2}/5\ ,$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{32}{25}\ ,$$

$$\sin 2\alpha=\frac{7}{25}\ ,\quad \cos 2\alpha=\pm\frac{24}{25}\ 。$$

因爲 $5\pi/4<\alpha<3\pi/2$，所以，$5\pi/2<2\alpha<3\pi$，2α 在第二象限，所以，得

$$\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{24}{25}-\frac{7}{25})=-\frac{31}{25\sqrt{2}}\ 。\ \|$$

3.滿足方程組

$$\begin{cases} A+\ \ B+\ \ C=93 \\ \frac{4}{5}A+\frac{5}{6}B+\frac{6}{7}C=79 \end{cases}$$

的正整數組 $(A,\ B,\ C)$ 爲_____。

解：將第二式改寫成 $4\cdot6\cdot7A+5\cdot5\cdot7B+5\cdot6\cdot6C=5\cdot6\cdot7\cdot79$。因爲 5、6 與 7 兩兩互質，所以，可知 A 是 5 的倍數、B 是 6 的倍數、C 是 7 的倍數。設 $A=5k$，$B=6l$，$C=7m$，其中 k、l 與 m 都是正整數。代入原方程組，得

$$\begin{cases} 5k+6l+7m=93 \\ 4k+5l+6m=79 \end{cases}。$$

兩式相減，得

$$k+l+m=14\ 。$$

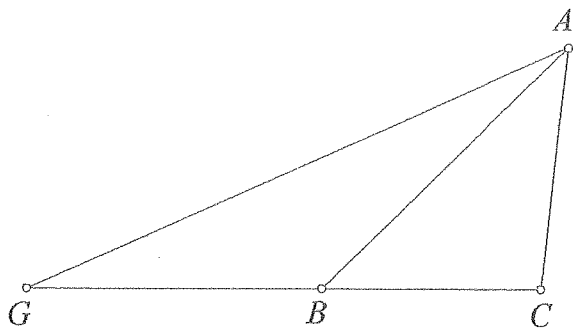
第三式乘以 7、再與第一式相減，即得

$$2k+l=5\ 。$$

此式只有兩組正整數解：$(k,l)=(1,3)$ 或 $(2,1)$。將兩組解代入前面任一式，可得 m 的值分別爲 $m=10$ 或 11。因此，原方程組共有兩組正整數解：

$(A,B,C)=(5,18,70)$ 或 $(10,6,77)$。 $\|$

4.在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，$\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{AC}=2$、$\overline{DF}=5$、$\angle B+\angle E=180°$且$\angle C+\angle F=120°$，則$\overline{BC}+\overline{EF}=$_____。



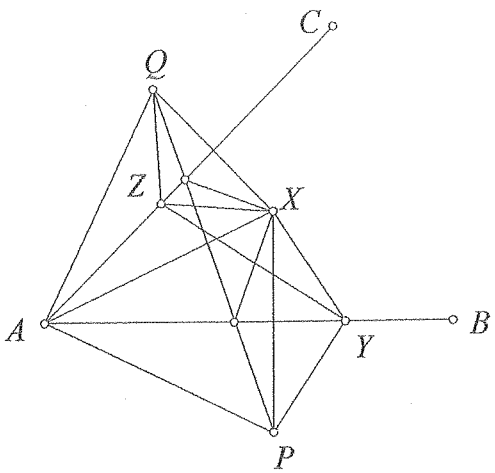
解：在直線BC上選取點G，使得$\overline{BG}=\overline{EF}$且$G$與$C$在$B$的異側。因爲$\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{BG}=\overline{EF}$且$\angle ABG=180°-\angle ABC=\angle DEF$，所以，$\triangle ABG$與$\triangle DEF$全等。由此可知：$\overline{AG}=\overline{DF}=5$而且$\angle AGB=\angle DFE=120°-\angle ACB$。於是，在$\triangle AGC$中，

$\overline{AC}=2$、$\overline{AG}=5$且$\angle CAG=180°-\angle AGC-\angle ACG=60°$。依餘弦定理，得

$$\overline{CG}^2=\overline{AC}^2+\overline{AG}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AG}\cos\angle CAG$$
$$=2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cos60°=19。$$

於是，得$\overline{BC}+\overline{EF}=\overline{BC}+\overline{BG}=\overline{CG}=\sqrt{19}$。‖

5.設$\angle BAC=45^\circ$，而X爲其內部一點且$\overline{AX}=6$，在射線$\overrightarrow{AB}$與射線$\overrightarrow{AC}$上分別取異於角頂A的一點Y與Z，並使X、Y、Z三點不共線，則$\triangle XYZ$的周長之最小值爲_____。



解：令點P與點Q分別表示點X對直線AB與直線AC的對稱點，則$\overline{XY}=\overline{PY}$且$\overline{ZX}=\overline{ZQ}$。

於是，得

$$\triangle XYZ\text{的周長}=\overline{XY}+\overline{YZ}+\overline{ZX}=\overline{PY}+\overline{YZ}+\overline{ZQ}\geq\overline{PQ}。$$

另一方面，因爲點P與點Q分別表示點X對直線AB與直線AC的對稱點，所以，

$\overline{AP}=\overline{AX}=6$、$\overline{AQ}=\overline{AX}=6$、$\angle PAB=\angle BAX$、$\angle CAQ=\angle XAC$，進一步得

$$\angle PAQ=\angle PAB+\angle BAX+\angle XAC+\angle CAQ=2\angle BAX+2\angle XAC=2\angle BAC=90^\circ。$$

由此可知$\triangle ABC$是直角等腰三角形，$\overline{PQ}=\sqrt{2}\cdot\overline{AP}=6\sqrt{2}$。‖

6.滿足$1\le a\le b<c\le d\le 15$的整數組(a,b,c,d)共有_____組。。

解：要計算滿足$1\le a\le b<c\le d\le 15$的所有整數組(a,b,c,d)的總數，可以由滿足$1\le a\le b\le c\le d\le 15$的所有整數組$(a,b,c,d)$的總數中，扣除其中$b=c$的所有整數組$(a,b,c,d)$的總數。

要得出一個滿足$1\le a\le b\le c\le d\le 15$的整數組$(a,b,c,d)$，只要從 1 至 15 等十五個數中取出 4 個數 (可以重複)。例如：取出 1, 2, 4, 4 時，表示$a=1$、$b=2$、$c=4$、$d=4$。因爲這是重複組合的問題，所以，滿足$1\le a\le b\le c\le d\le 15$的整數組$(a,b,c,d)$的總數爲$C_4^{15+4-1}=C_4^{18}$。

要得出一個滿足$1\le a\le b=c\le d\le 15$的整數組(a,b,c,d)，只要從 1 至 15 等十五個數中取出 3 個數 (可以重複)。例如：取出 1, 2, 4 時，表示$a=1$、$b=2$、$c=2$、$d=4$。因爲這是重複組合的問題，所以，滿足$1\le a\le b=c\le d\le 15$的整數組(a,b,c,d)的總數爲$C_3^{15+3-1}=C_3^{17}$。

滿足$1\le a\le b<c\le d\le 15$的所有整數組(a,b,c,d)的總數爲

$$C_4^{18}-C_3^{17}=C_4^{17}=2380\text{。}$$

7.若下列二拋物線的兩交點的連線通過原點，則兩交點坐標爲 _____。

$$y=x^2+a\text{，}$$

$$y=-x^2+4x+3\text{。}$$

解：將兩拋物線的方程式消去y，即得$2x^2-4x+a-3=0$。設此方程式的兩根爲α與β，則得

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=\dfrac{a-3}{2}\end{cases}\text{。}$$

因爲兩拋物線的交點坐標爲(α,α^2+a)與(β,β^2+a)，所以，其連線的方程式爲$(\alpha+\beta)x-y-\alpha\beta+a=0$。將$\alpha+\beta$與$\alpha\beta$代入，即得兩交點的連線的方程式爲$4x-2y+a+3=0$。因爲此直線通過原點，所以，$a=-3$。代入$2x^2-4x+a-3=0$即得$2x^2-4x-6=0$，解得$x=-1$或$x=3$。於是，此時兩拋物線的交點坐標爲$(-1,-2)$與$(3,6)$。‖

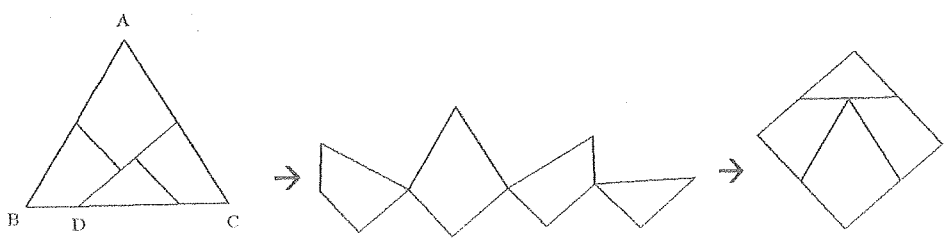
九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第四區（新竹高中）　筆試(一)試題

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分，第一題 16 分，第二題 16 分，第三題(a)7 分，(b)10 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 不可使用計算器，請關閉手機電源。
5. 請將答案寫在答案卷內。

[問題一] 試證：對任意正整數 n，$(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 皆為正整數，而且是 2^n 的倍數。

[問題二] 邊長為 4 的正三角形 ABC 紙板，如圖所示將它剪開，然後可以拼成一個正方形。試求 BD 的長度。



[問題三] 小明有 64 張卡片，每張卡片上都有不同的條碼。小明只知道每一組條碼代表一個數字，但是他不知如何解讀這些條碼。為判讀這些條碼所代表的意義，小明有一台機器可供使用。這台機器每次操作可以讀取兩張卡片，然後告訴小明哪一張卡片上的條碼所代表的數字較大。

(a) 為找出這堆條碼所代表的第二大的數字的卡片，小明至少需要操作這台機器幾次？

(b) 為找出這堆條碼所代表的第三大的數字的卡片，小明至少需要操作這台機器幾次？證明你的答案。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第四區（新竹高中）　筆試(一)【參考解答】

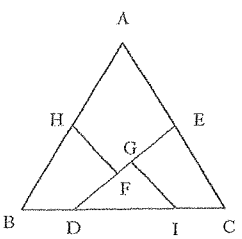
競賽試題(一)解答：

1. 將 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 記為 $A(n)$。

(i) 當 $n=1,2$ 時，$A(1)=6$ 為 2 的倍數，$A(2)=28$ 為 2^2 的倍數。

(ii) 現假設當 $n=k\text{-}1$ 和 k 時原敘述成立，亦即 $A(k\text{-}1)$ 為 2^{k-1} 的倍數，而 $A(k)$ 為 2^k 的倍數 $(k \geq 2)$。則當 $n=k+1$ 時，$A(k+1)=6A(k)+4A(k\text{-}1)$ 可知為 2^{k+1} 的倍數。(這裡利用的公式是 $x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$.) 故由數學歸納法原理知原敘述對所有正整數 n 皆成立。

2.



令正方形的邊長爲a,則 $a^2=4\sqrt{3}$. 所以 $a=2\sqrt[4]{3}$.

由圖形的拼合關係，可觀察到

$\overline{AE}=\overline{EC}=2,\ \overline{EF}+\overline{FD}=\overline{EG}+\overline{GD},\ \overline{EF}+\overline{EG}=\overline{FD}+\overline{GD}=a.$

因此$\overline{FD}=\overline{EG}$, 所以$\overline{DE}=a=2\sqrt[4]{3}$.

ΔCDE中$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-2\overline{CD}\cdot\overline{CE}\cos 60°,$

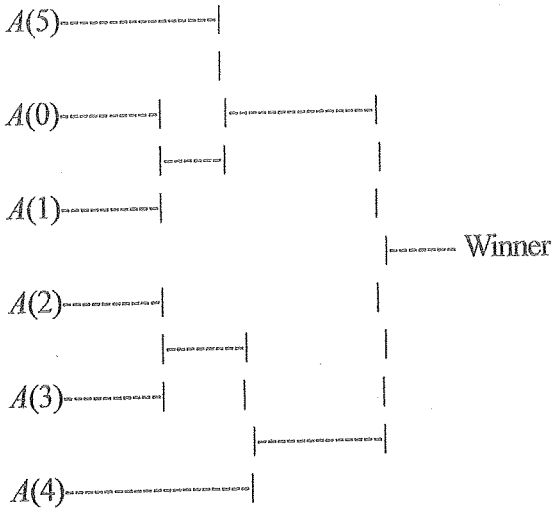
$\Rightarrow 4\sqrt{3}=\overline{CD}^2+4-2\overline{CD}$

$\Rightarrow \overline{CD}=1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}$

$\Rightarrow \overline{BD}=4-\overline{CD}=3-\sqrt{4\sqrt{3}-3}$

3. (a) 我們將此題情境，化約為未知的 64 個相異數字來比大小。找出最大的數字需要 63 次比較 (考慮單淘汰的過程)。因為第二大的數字只會小於最大的數字，所以必定發生在直接輸給最大的數字的那 6 個數字中。再從那 6 個數字取出最大的數字需要 5 次操作，所以找出第二大的數字需要 $63+5=68$ 次。

(b) 第三大的數字必定發生在上述比較中直接輸給第二大數字之處。首先在步驟 (a) 中，直接敗給最大數字之卡片有 6 張，我們分別將它們記為 $A(j)$，其中 $j=0,1,2,3,4,5$ 為它們敗給最大數字之前贏過的數字個數。從它們之中決定第二大數字的樹狀圖可以如下排列(如下頁之圖)。如果 $A(j), j=0,1,2,3,$ 為第二大數字，則直接敗給第二大數字的卡片有 $(j+3)$ 張，比出第三大的數字需要再 $j+2$ 次操作：如果 $j=4,5,$ 則直接敗給第二大數字的卡片有 $(j+2)$ 張，比出第三大的數字需要再 $(j+1)$ 次操作。由上述討論，知道在最壞情形下，比出第三大數字還需要 6 次，故總共需要 $68+6=74$ 次。


A(5)
A(0)
A(1)
Winner
A(2)
A(3)
A(4)

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第四區（新竹高中）　筆試(二)試題

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，每一題3.5分，共21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 不可使用計算器，請關閉手機電源。
5. 請將答案依序寫在答案欄內(勿寫在本試題卷上)。

1. $\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}=$ __(1)__ 。

2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$。若 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，O 為 $\triangle ABC$ 的外心，M 為 BC 邊的中點，則 OM 的長和 AH 的長之比 $\frac{\overline{OM}}{\overline{AH}}=$ __(2)__ 。

3. 正整數 n 滿足 3 可以整除 $2n-1$，5 可以整除 $3n-2$，且 7 可以整除 $5n-4$。則 n 之最小可能值為 __(3)__ 。

4. 方程式 $\sqrt{(x+4)^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+1}=10$ 的實根 x 為 __(4)__ 。

5. 自 1 至 15 的正整數中，選取三個兩兩不相鄰的數字的方法有 __(5)__ 種。

6. 若整數 $a>2004$，且方程式 $(x-a)(x-2004)+1=0$ 有整數根，則 $a=$ __(6)__ 。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

北區　第四區（新竹高中）　　筆試(二)【參考解答】

競賽試題(二)答案：

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 89

(4) $\pm\frac{10\sqrt{2}}{3}$

(5) 286

(6) 2006

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（台中一中）　筆試(一)試題

編號：＿＿＿＿＿＿
（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、 (12 分) Craps 是美國賭場常見的一種遊戲，它的玩法如下：同時丟擲兩個骰子，如果擲出的點數總和為 7 或 11，你就贏了；如果擲出的點數總和為 2、3 或 12，你就輸了；如果擲出的點數總和為其他數字（此數字爾後就稱為 Your Point），那你就再擲第二次。從第二次丟擲開始，如果出現 Your Point 你就贏了；如果出現 7 你就輸了；若出現其他數字就再繼續擲，直到出現 Your Point 或 7 為止。試問在玩一局 Craps 中，你贏的機率有多少？

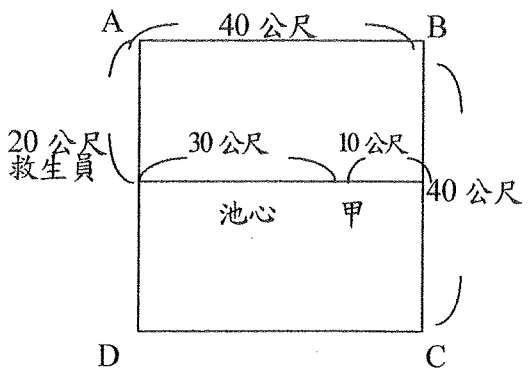
二、 (12 分) 任給八個實數 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ ，證明下面六個數至少有一個是非負的

$$a_1a_3 + a_2a_4 \text{ ，} a_1a_5 + a_2a_6 \text{ ，} a_1a_7 + a_2a_8 \text{ ，}$$

$$a_3a_5 + a_4a_6 \text{ ，} a_3a_7 + a_4a_8 \text{ ，} a_5a_7 + a_6a_8 \text{ 。}$$

三、 (12 分) 設 ABCDEF 為凸六邊形，若對角線 AD, BE 及 CF 中的每一條線都會等分此六邊形之面積，證明這三條對角線交於一點。

四、 (13 分) 設 ABCD 為一個邊長 40 公尺的正方形水池，某甲因溺水正等待救援。甲位置是在水池中心與 BC 岸的中點上，而救生員則在 AD 岸邊上且和甲距離 30 公尺（如下圖所示）。若救生員在岸上跑步的速度是在池中游泳速度的 5 倍，試問救生員應該先跑到岸邊的哪一點再跳入池中游向甲去救援，才能最快救到甲呢？



九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（台中一中）　筆試(一)【參考解答】

一、【解答】

點數總和		骰子 1					
		1	2	3	4	5	6
骰子 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

點數總和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probability	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

玩一局 Craps 有 7 種方式可以贏。

E1={第一輪就丟擲出 7 或 11 點而贏}　P{E1}=6/36+2/36=2/9

"Your Points" 可能是 4, 5, 6, 8, 9, 10.

E4={以擲出 Your Point=4 而贏}={第一輪擲出 4}AND{第二輪非 4&第三輪擲出 4}or{第二、三輪非 4&第四輪擲出 4}

$$P\{E4\}= 3/36 \times \{3/36 + (27/36) \times (3/36) + (27/36) \times (27/36) \times (3/36) + (27/36) \times (27/36) \times (27/36) \times (3/36) + \cdots\cdots\}$$

$$= 3/36 \times \{\frac{3/36}{1-27/36}\} = (3/36) \times (3/9) = 1/36 \text{ or}\{\text{第二、三輪非 4\&第五輪擲出 4}\}$$

E5={以擲出 Your Point=5 而贏}

$$P\{E5\} = 4/36 \times \{4/36 + (26/36) \times (4/36) + (26/36) \times (26/36) \times (4/36) + (26/36) \times (26/36) \times (26/36) \times (4/36) + \cdots\cdots\}$$

$$= 4/36 \times \{\frac{4/36}{1-26/36}\} = (4/36) \times (4/10) = 2/45$$

E6={以擲出 Your Point=6 而贏}

$P\{E6\} = 5/36 \times \{5/36 + (25/36) \times (5/36) + (25/36) \times (25/36) \times (5/36) + (25/36) \times (25/36) \times (25/36) \times (5/36) + \cdots\cdots\}$

$= 5/36 \times \{\frac{5/36}{1-25/36}\} = (5/36) \times (5/11) = 25/396$

E8={以擲出 Your Point=8 點而贏}={以擲出 Your Point=6 點而贏}

$P\{E8\} = P\{E6\} = 25/396$

E9={以擲出 Your Point=9 點而贏}={以擲出 Your Point=5 點而贏}

$P\{E9\} = P\{E5\} = 2/45$

E10={以擲出 Your Point=10 點而贏}={以擲出 Your Point=4 點而贏}

$P\{E10\} = P\{E4\} = 1/36$

$P\{\text{贏一局 Craps}\} = (2/9) + (1/36) + (2/45) + (25/396) + (25/396) + (2/45) + (1/36) = (976/1980) = (244/495) = 0.49292929\ldots$

二、【解答】

令 $A_1 = (a_1, a_2)$，$A_2 = (a_3, a_4)$

$A_3 = (a_5, a_6)$，$A_4 = (a_7, a_8)$

則 $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = a_1a_3 + a_2a_4$

$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} = a_1a_5 + a_2a_5$

$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_4} = a_1a_7 + a_2a_8$

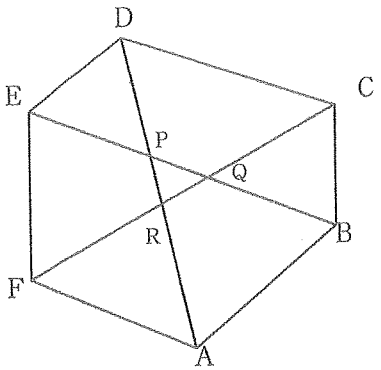
$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = a_3a_5 + a_4a_6$

$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_4} = a_3a_7 + a_4a_8$

$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_4} = a_5a_7 + a_6a_8$

$\overrightarrow{OA_1}$、$\overrightarrow{OA_2}$、$\overrightarrow{OA_3}$、$\overrightarrow{OA_4}$ 四個向量至少有兩個向量間夾角小於或等於 $\frac{\pi}{2}$，故得證。

三、【解答】



設 AD 與 BE 交於 P

BE 與 CF 交於 Q

CF 與 AD 交於 R

且設 P、Q、R 相異

設 P 與 DE 在 CF 之同一側

∵ AD 及 BE 均為面積之等分線

$\therefore S_{\Delta PDE}+S_{\square PDCB}=S_{\square PDCB}+S_{\Delta PBA}$

$\therefore S_{\Delta PDE}=S_{\Delta PBA}$　$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PD}\cdot\overline{PE}$

同理 $\begin{cases}\overline{QC}\cdot\overline{QB}=\overline{QE}\cdot\overline{QF}\\ \overline{RC}\cdot\overline{RD}=\overline{RF}\cdot\overline{RA}\end{cases}$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{RC}\cdot\overline{RD}\cdot\overline{QE}\cdot\overline{QF}=\overline{QC}\cdot\overline{QB}\cdot\overline{RA}\cdot\overline{RF}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}$ .....①

但 $\begin{cases}\overline{PA}>\overline{RA},\overline{PB}>\overline{QB},\overline{RC}>\overline{QC}\\ \overline{RD}>\overline{PD},\overline{QE}>\overline{PE},\overline{QF}>\overline{RF}\end{cases}$

$\therefore \overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{RC}\cdot\overline{RD}\cdot\overline{QE}\cdot\overline{QF}>\overline{QC}\cdot\overline{QB}\cdot\overline{RA}\cdot\overline{RF}\cdot\overline{PD}\cdot\overline{PE}$ .....②與①矛盾！

∴"P、Q、R 相異"不成立　　∴ $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 共線

四、【解答】

為了方便並不失一般性，設 10 公尺為 1 單位長，並設岸上速度為 5，而水中速度為 1。令救生員的位置為 E，AE 段不可能比 E 更好，又設 AB 邊上距離 B 為 1 單位長的點為 F，則 BF 段也不可能比 F 好，再設 BC 邊上距 B 為 2 單位長的點為 G，則 GC 段不可能比 G 更好，所以只需研究 AF、BG 段，再和 E 點作比較：

(1) 如果由 E 跳下水，所花時間為 $\frac{3}{1}=3$。

(2) 如果在 AF 段跳下水，設此點距離 F 為 x 單位，則所花時間為

$$T(x)=\frac{5-x}{5}+\sqrt{x^2+4}\ ,\ 3\geq x\geq 0$$

現在求 $T(x)$ 的值域。

令 $y=\frac{5-x}{5}+\sqrt{x^2+4}$

解 x，$\left[\sqrt{x^2+4}\right]^2=\left[y-1+\frac{x}{5}\right]^2$

$$x^2+4=\frac{x^2}{25}+2\cdot(y-1)\left(\frac{x}{5}\right)+(y-1)^2$$

$$\frac{24}{25}x^2-\frac{2(y-1)}{5}x+4-(y-1)^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots①$$

x 的判別式 $\left[\frac{2(y-1)}{5}\right]^2-4\cdot\frac{24}{25}\left[4-(y-1)^2\right]\geq 0$

$$(y-1)^2-24\left[4-(y-1)^2\right]\geq 0$$

整理得 $y\geq 1+\frac{4}{5}\sqrt{6}$ 或 $y\leq 1-\frac{4}{5}\sqrt{6}$（不合）

以 $y=1+\frac{4}{5}\sqrt{6}$ 代入①解得 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$，此滿足 $3\geq x\geq 0$

故在 AF 段 $T(x)$ 最小值為 $1+\frac{4}{5}\sqrt{6}$.

(3) 如果在 BG 段跳下水，設此點距離 G 點 x 單位，則所花時間為

$$2\quad T(x)=\frac{8-x}{5}+\sqrt{1+x^2}\ ,\ 2\geq x\geq 0$$

現在求 $T(x)$ 的值域。

令 $y=\frac{8-x}{5}+\sqrt{1+x^2}$

解 x，$\left[\sqrt{1+x^2}\right]^2=\left(y-\frac{8}{5}+\frac{x}{5}\right)^2$

$$x^2+1=\frac{x^2}{25}+2\cdot\left(y-\frac{8}{5}\right)\cdot\frac{1}{5}x+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2$$

$$\frac{24}{25}x^2-\frac{2}{5}\left(y-\frac{8}{5}\right)x+1-\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots②$$

判別式 $\left[\frac{2}{5}\left(y-\frac{8}{5}\right)\right]^2-4\cdot\frac{24}{25}\left[1-\left(y-\frac{8}{5}\right)^2\right]\geq 0$

$$y\geq\frac{8}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}\quad 或\quad y\leq\frac{8}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}\ （不合）$$

以 $y=\frac{8}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 代入②得解 $x=\frac{1}{2\sqrt{6}}$，此滿足 $0\leq x\leq 2$

所以 BG 段最小值為 $\frac{8}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

比較(1) (2) (3)知 $\frac{8}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 最小。故救生員應先跑到 BG 段距離 G 點 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ 單位的地方（也就是 $\frac{10}{2\sqrt{6}}$ 公尺）再跳入水中。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（台中一中）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿
（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題，一、二題為填充題，三、四題為計算題；滿分為二十一分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、求$(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{100}$展開式中$x^3$項之係數。＿＿＿＿＿＿
(5分)

二、假設大圓半徑為2且圓心在$(0,0)$，小圓半徑為1且圓心在$(3,0)$，並假設P點在小圓上且座標為$(2,0)$。令大圓固定不動，讓小圓以逆時鐘方向（對大圓圓心而言）沿著大圓圓周作等速的滾動（不滑動），60秒繞完大圓圓周一圈。試求：當小圓滾動2.5秒時，P點的新座標。＿＿＿＿＿＿
(5分)

三、已知$\theta=\tan^{-1}\frac{5}{12}$，設$a=(\cos\theta)^{\frac{1}{2004}}+(\sec\theta)^{\frac{1}{2004}}$，求$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2004}$之值。
(5分)

四、若a、b、c、d為正整數，滿足$a^5=b^4$，$c^3=d^2$及$c-a=19$，求$d-b$。
(6分)

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（台中一中）　筆試(二)【參考解答】

一、【解答】

x^3之係數$=C_3^4+C_3^5+\cdots+C_3^{100}$

$=\left(C_4^5-C_4^4\right)+\left(C_4^6-C_4^5\right)-\cdots-\left(C_4^{101}\cdot C_4^{100}\right)$

$=C_4^{101}-1$

二、【解答】

大圓圓周長為4π，小圓每秒轉$\frac{4\pi}{60}$，2.5 秒轉$\varphi=\frac{4\pi}{60}\times 2.5=\frac{\pi}{6}$

當小圓轉φ時，連接兩圓心之線段與 x 軸的夾角為θ，則$2\theta=\varphi$

P 的新座標為$\left(3\cos\theta-\cos\left(\theta+\varphi\right),3\sin\theta-\sin\left(\theta+\varphi\right)\right)$

$=\left(3\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{4},3\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}\right)$

三、【解答】

因$\theta=\tan^{-1}\frac{5}{12}\Rightarrow\cos\theta=\frac{12}{13}$且$a=\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{1}{2004}}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{-1}{2004}}$，

則$a^2=\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{2}{2004}}+2+\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{-2}{2004}}$且

$a^2-4=\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{2}{2004}}-2+\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{-2}{2004}}=\left[\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{-1}{2004}}-\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{1}{2004}}\right]^2$

進而　$\sqrt{a^2-4}=\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{-1}{2004}}-\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{1}{2004}}$

因此　$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2004}=\left(\frac{12}{13}\right)^{\frac{-1}{2004}}=\frac{13}{12}$.

四、【解答】

$\because a^5=b^4$中，5、4 互質　$\therefore\exists m\in N$，使得$a=m^4,b=m^5$

同理存在$n\in N$，使得$c=n^2,d=n^3$

但　$c-a=19\Rightarrow n^2-m^4=19$

$\Rightarrow\left(n-m^2\right)\left(n+m^2\right)=19$　因 19 為質數

且　$n-m^2<n+m^2$　$\therefore\begin{cases}n-m^2=1\\n+m^2=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=10\\m=3\end{cases}$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（嘉義高中）　筆試(一)試題

編號：＿＿＿＿＿＿
（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、 (12 分) 對於自然數 n，定義 $f(n)$ 為 n 的各個位數三次方的和，例如：$f(172)=1^3+7^3+2^3$。首先任意給定一個自然數 n_0，然後令 $n_k=f(n_{k-1})$，$k\geq 1$。試證明：對於所有足夠大的自然數 k，我們有 $n_k\leq 9999$。

二、 (12 分) B 為 $\overline{AC}$ 上任一點，分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 為直徑在同一側畫半圓 X、Y、Z。過 B 點畫直線 $L\perp\overline{AC}$。令圓 S 為位於 L、Y 和 Z 之間的最大圓。令 S 和 Y 的切點為 D。S 上過 D 點的直徑延長線交 L 於 E。試證 $\overline{AB}=\overline{DE}$。

三、 (13 分) 請找出下列方程組的所有實數的解 (x,y)：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y} = (x^2+3y^2)(3x^2+y^2)\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y} = 2(y^4-x^4)\end{cases}。$$

四、 (12 分) 某圓之圓心為 O，P 為圓外一點，$A_1A_2\cdots A_{2k+1}$ $(k\geq 1)$ 為圓內接正多邊形，P、A_1、O 在同一線上，且 $\overline{PA_1}=a$、$\overline{OA_1}=r$。求 $\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{k+1}}$（以 a、r 及 k 表示）。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（嘉義高中）　筆試(一)【參考解答】

一、【解答】

如果$n \geq 10^4$，則存在$m \geq 4$使得$10^m \leq n < 10^{m+1}$。那麼

$$f(n) \leq (m+1)9^3 < 9^m + \binom{m}{1}9^{m-1} < \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}9^{m-j} = (9+1)^m \leq n \text{ 。}$$

這證明了如果$n_k \geq 10^4$則$n_{k+1} < n_k$.

再則，如果$n < 10^4$則

$$f(n) \leq 4 \times 9^3 < \sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}9^{4-j} = 10^4.$$

所以n_k最終小於10^4且之後永遠小於10^4。

二、【解答】

令F為S的圓心，G為BC的中點，H為AC的中點，M為AC到F最近的點，T為S和Z的切點。再令$a=\overline{AB}/2$、$b=\overline{BC}/2$、$r=\overline{DF}$、$y=\overline{FM}$、$w=\overline{DE}$，我們需要證明$w=2a$。

首先注意到$\overline{BM}=r$, $\overline{MH}=|b-a-r|$, $\overline{FG}=b+r$, $\overline{FH}=a+b-r$。因為ΔMGF和ΔMHF是直角三角形，所以$(b+r)^2=y^2+(b-r)^2$且$(a+b-r)^2=y^2+(b-a-r)^2$。因此 $r=\dfrac{ab}{a+b}$。

因為ΔMGF和ΔBGE是相似，所以$\dfrac{GF}{MG}=\dfrac{GE}{BG}$，因此 $\dfrac{b+r}{b-r}=\dfrac{b+w}{b}$。將上述r代入方程式後，我們得到 $w=2a$。

三、【解答】

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=2\left(y^4-x^4\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①+②：$\frac{2}{x}=x^4+10x^2y^2+5y^4\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

①-②：$\frac{1}{y}=5x^4+10x^2y^2+y^4\cdots\cdots\cdots\cdots$④

③×x 及④×y 得

$$x^5+10x^3y^2+5xy^4=2\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$5x^4y+10x^2y^3+y^5=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤+⑥及⑤-⑥得

$$\left(x+y\right)^5=3\ \text{及}\ \left(x-y\right)^5=1$$

$\therefore\ x=\frac{3^{\frac{1}{5}}+1}{2},\ y=\frac{3^{\frac{1}{5}}-1}{2}.$

四、【解答】

考慮複平面上的一個半徑為 r 的圓，

我們可將 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k+1}$ 的座標看作 $z^{2k+1}=r^{2k+1}$ 的解，並令 A_1 的座標為 $\left(r,0\right)$，則 P 的座標為 $\left(a+r,0\right)$。

由對稱性知 $\overline{PA_2}=\overline{PA_{2k+1}},\overline{PA_3}=\overline{PA_{2k}},\cdots,\overline{PA_{k+1}}=\overline{PA_{k+2}}.$

我們用極座標來表示 $z^{2k+1}=r^{2k+1}$ 的根為 $w_1,w_2,\cdots,w_{2k+1}$。

因為 $P=\left(a+r\right)+0i=\frac{\left(a+r\right)}{r}\cdot r$，令 $w_j=\left(\cos\frac{2\pi j}{2k+1}+i\sin\frac{2\pi j}{2k+1}\right)r$

則 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{2k+1}}=\prod_{j=1}^{2k+1}\left|r\left(\frac{a+r}{r}\right)-r\left(\cos\frac{2\pi j}{2k+1}+i\sin\frac{2\pi j}{2k+1}\right)\right|$

$$=r^{2k+1}\left|\prod_{j=1}^{2k+1}\left[\frac{\left(a+r\right)}{r}-\frac{w_j}{r}\right]\right|$$

$$=r^{2k+1}\left|\left(\frac{a+r}{r}\right)^{2k+1}-1\right|=\left(a+r\right)^{2k+1}-r^{2k+1}$$

$\overline{PA_1}=a$，且 $\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{2k+1}}=\overline{PA_1}\times\left(\prod_{j=2}^{k+1}\overline{PA_j}\right)^2=a\times\left(\prod_{j=2}^{k+1}\overline{PA_j}\right)^2$

$$\therefore\ \prod_{j=1}^{k+1}\overline{PA_j}=a\times\sqrt{\frac{1}{a}\overline{PA_1}\times\cdots\times\overline{PA_{2k+1}}}$$

$$=\sqrt{a\left[\left(a+r\right)^{2k+1}-r^{2k+1}\right]}$$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（嘉義高中）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿
（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共二題填充題、二題證明題，滿分為二十一分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、柔道擂台賽，比賽過程是：甲、乙二隊各出 7 名隊員按事先安排的順序出場比賽，(5 分)

雙方先由 1 號隊員出賽，負者遭淘汰；負方再派 2 號出場迎戰勝方的 1 號，…以此類推，直至一方 7 名隊員全被淘汰為止，另一方獲勝。所有可能出現的比賽過程的個數為 ＿(1)＿ 。

二、某電腦程式啟動後，第一秒開始，每隔一秒隨機產生數字 0 或 1。某次程式啟動後，(5 分)

在第 10 秒時共產生出 5 個 0，事件：「在第 8 秒共產生出 4 個 0」發生的機率為 ＿(2)＿ 。

三、求所有自然數 n，使得 (5 分)

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n=9 \\ \dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=1 \end{cases}$$

有正實數解。

四、x 是實數時，為使 x 的函數 (6 分)

$$\frac{ax^2+x+1}{x^2+x+a}$$

取一切實數值，常數 a 必須在什麼範圍內？

一、【解答】

$$2\left[1+\binom{7}{1}+\binom{8}{2}+\binom{9}{3}+\binom{10}{4}+\binom{11}{5}+\binom{12}{6}\right]$$

$$=2\binom{13}{6}$$

二、【解答】

$$\frac{2\times C_4^8}{C_5^{10}}=2\frac{5(10-5)}{10(10-1)}$$

$$=\frac{5}{9}$$

三、【解答】

若方程組有解$x_1,\cdots,x_n$，$x_n\geq 0$

則$\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{x_1\cdots x_n}}$

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\geq n$$

又 $\frac{9}{n}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$

故 $\frac{9}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\geq n$

$$3\geq n$$

$n=1$時，方程明顯無解

$n=2$時，方程為$\begin{cases}x_1+x_2=9\\x_1+x_2=x_1x_2\end{cases}$，

故 x_1,x_2為$t^2-9t+9=0$之根，且它的根

$$\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\times 9}}{2}>0\text{。}$$

$n=3$時，$x_1=x_2=x_3=3$為一解。故所求n為2及3。

四、【解答】

分析：設 k 為任意實數，求為使方程

$$\frac{ax^2+x+1}{x^2+x+a}=k$$

有實根的條件。

設 k 是任意實數，令

$$\frac{ax^2+x+1}{x^2+x+a}=k \qquad (1)$$

為使(1)的左邊取一切實數值，其充要條件是(1)有實根且該實根不滿足 $x^2+x+a=0$。由(1)得

$$(k-a)x^2+(k-1)x+ak-1=0 \qquad (2)$$

(A) $k-a\neq 0$ 的情形。(2)是 x 的二次方程，所以(2)有實根的條件是判別式

$$=(k-1)^2-4(k-1)(ak-1)\geq 0$$

$$(1-4a)k^2+2(1+2a^2)k+1-4a\geq 0 \qquad (3)$$

(i) $1-4a\neq 0$ 時。為使(3)對任意實數 k 成立，則

$$D=4(1+2a^2)^2-4(1-4a)^2\leq 0 \qquad (4)$$

且

$$1-4a>0 \qquad (5)$$

由(4)得

$$a(a+2)(a-1)^2\leq 0 \qquad (6)$$

由(5)得

$$a<\frac{1}{4} \qquad (7)$$

使(6),(7)同時成立的 a 值的範圍是

$$-2\leq a\leq 0 \qquad (8)$$

(ii) $1-4a=0$ 時。由(3)得 $\frac{9}{4}k\geq 0$，就不能對任意的實數 k 成立。因而

$$1-4a\neq 0$$

(B) $k-a=0$ 的情形。由(2)得

$$(a-1)x+a^2-1=0$$

為使這個方程式有實根，只須 $a\neq 1$。

(C)若 $x^2+x+a=0$ 之根 $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$ 滿足方程(2)

則 $(k-a)\alpha^2+(k-1)\alpha+ak-1=0$

$$(k-a)(-\alpha-a)+(k-1)\alpha+ak-1=0$$

$$(a-1)\alpha+a^2-1=0$$

因 $a\neq 1,\alpha+a+1=0$

$$\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}=-a-1$$

$$\pm\sqrt{1-4a}=-2a-1$$

$$1-4a=4a^2+1+4a$$

$\therefore\quad a=0$ 或 -2 。

因此，所求的a值的範圍是

$$-2<a<0.$$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（台南一中）　筆試(一)試題

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：過平面上一點 $P(4,6)$ 的兩線與圓 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 切於 Q,R 兩點。

求 $\triangle PQR$ 的面積。

[問題二]：令 a,b,c 為任意的正實數，試證 $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 9abc$ 。

[問題三]：令 $M(a,b,c)$ 為函數 $f(x)=|4x^3+ax^2+bx+c|$ 在區間[-1, 1]的最大值，當

$f(x)=|4x^3-3x|$ 時(即 $a=0,b=-3,c=0$)，$M(0,-3,0)=1$ 。

對於任意實數 a,b,c ，試證 $M(a,b,c)\geq 1$ 。

[問題四]：試證 $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{9001^4}<\frac{83}{72}$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（台南一中）　筆試(一)【參考解答】

[問題一]：過平面上一點 $P(4,6)$的兩線與圓 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 切於 Q,R 兩點。

求$\triangle PQR$ 的面積。

[參考解答]：　圓方程式化為：$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$　圓心: $C(1,2)$

$CP=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5$，　$PQ=PR=4$,

CP 與 QR 之交點為 E, 則 $RE=(3\times4)/5=2.4$

$CE:RE=RE:EP$ 且 $CE+EP=5$ 得 $EP=3.2$

$\triangle PQR$ 的面積 $=2.4\times3.2=7.68$

[問題二]：令 a,b,c 為任意的正實數，請証明 $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 9abc$ 。

[參考解答]：因為 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ 且 $a+b+c>0$，所以

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

又因為 $(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc+(a+b)(b+c)(c+a)$

且 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

所以 $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 9abc$.

[問題三]：令$M(a,b,c)$為函數$f(x)=|4x^3+ax^2+bx+c|$在區間[-1, 1]的最大值，當

$f(x)=|4x^3-3x|$時(即$a=0,b=-3,c=0$)，$M(0,-3,0)=1$。對於任意實數a,b,c，試證$M(a,b,c)\geq 1$。

[參考解答]：令 $g(x)=4x^3-3x$,

當 $x=-1$時, $g(-1)=-1$, 當 $x=\frac{-1}{2}$時, $g(\frac{-1}{2})=1$

當 $x=\frac{1}{2}$時, $g(\frac{1}{2})=-1$, 當 $x=1$時, $g(1)=1$

假設存在實數 a,b,c 使得 $M(a,b,c)<1$

令 $H(x)=(4x^3+ax^2+bx+c)-(4x^3-3x)$

則 $H(-1)>0, H(\frac{-1}{2})<0, H(\frac{1}{2})>0, H(1)<0$

因此 $H(x)$ 至少有三個相異實根，但事實上$H(x)=ax^2+(b+3)x+c$

最多為二階多項式，所以矛盾．因此對於任意實數a,b,c $M(a,b,c)\geq 1$

[問題四]：試證 $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{9001^4}<\frac{83}{72}$

[參考解答]：$\frac{1}{k^4}\leq\frac{1}{k^2(k^2-1)}=\frac{1}{2k^2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}),\quad k\geq 2$

$\sum_{k=3}^{9001}\frac{1}{k^4}\leq\frac{1}{18}\sum_{k=3}^{9001}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{18}(\frac{1}{2}-\frac{1}{9002})<\frac{1}{36}$ (k 是奇數)

$\sum_{k=2}^{9000}\frac{1}{k^4}\leq\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{9000}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{8}(1-\frac{1}{9001})<\frac{1}{8}$ (k 是偶數)

$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{9001^4}<1+\frac{1}{8}+\frac{1}{36}=\frac{83}{72}$

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（台南一中）　筆試(二)試題

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分，第一題 5 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，第五題 4 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：令 X, Y 為銳角 $\angle AOB$ 兩邊 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 上之二點，且設 $\overline{OX}=a$，$\overline{OY}=b$，$\overline{XY}=c$。已知 $a^2-b^2=2$ 且 $\angle AOB$ 的度數為 $\pi/6$，求 c 之最小值？

[問題二]：3 元郵票 50 張，5 元郵票 30 張共可組成多少不同面額價錢的郵票？

[問題三]：令 a,b,c 為一三角形的三邊長，試證 $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}$

[問題四]：設 $S=\sum_{k=0}^{90}\sin^2 k^0=\sin^2 0^0+\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\cdots\cdots+\sin^2 90^0$。試求 S 之值?

[問題五]：平面上正方形一組相對頂點的座標為(-2, 2)與(2, 4)，另一組相對頂點的座標為 (a,b) 與 (c,d)。求 $a+b+c+d$ 的值。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（台南一中）　筆試(二)【參考解答】

[問題一]：令 X, Y 為銳角 $\angle AOB$ 兩邊 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 上之二點，且設 $\overline{OX}=a$，$\overline{OY}=b$，$\overline{XY}=c$。已知 $a^2-b^2=2$ 且 $\angle AOB$ 的度數為 $\pi/6$，求 c 之最小值？

[參考解答]：1

[問題二]：3 元郵票 50 張，5 元郵票 30 張共可組成多少不同面額價錢的郵票？

[參考解答]：292

[問題三]：令 a,b,c 為一三角形的三邊長，試證 $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}$

[參考解答]：因為對於所有 $x\ge 0, y\ge 0$，$2\sqrt{xy}\le x+y$，所以

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+2\sqrt{xy}+y\le 2(x+y).\ \text{令}\ \ x=a+b-c, y=b+c-a.$$

[問題四]：設 $S=\sum_{k=0}^{90}\sin^2 k^0=\sin^2 0^0+\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\cdots\cdots+\sin^2 90^0$。

試求 S 之值?

[參考解答]：45.5

[問題五]：平面上正方形一組相對頂點的座標為(-2 ,2)與(2, 4)，另一組相對頂點的座標為(a,b)與(c,d)。求 $a+b+c+d$ 的值。

[參考解答]：6

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
南區　（高雄中學）　筆試(一)試題

1、在ΔABC中，$\angle B=90^{o}$且$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$。若x不論為任何實數，皆能使 $ax^2+bx+c\geq 0$ 成立，求$\angle A$的最大可能角度值？

2、在xy平面上，有圓過$A(0,3),B(12,-6)$兩點，且與x軸交於兩相異點P、Q。試求：

(*a*) $\overline{PQ}$線段長之最小值。

(*b*) 當$\overline{PQ}$線段長為最小值時，該圓圓心座標。

3、迷宮入口處有向右、向左、向前三條路，其機率相同。若向右走，平均經過5分鐘，將回到入口處；若向左走，則平均經過8分鐘，就走出迷宮；若向前走，經過1分鐘後，有左、右兩條路。向左和向右的機率相同下，向左走，平均經過6分鐘，就走出迷宮；而向右走則經過2分鐘後，又回到入口處。平均而言，試問走一趟迷宮需多少時間？

4、若方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ 之相異三根為 $a,\ b,\ c$。試證：

$$\frac{a^{2004}-b^{2004}}{a-b}+\frac{b^{2004}-c^{2004}}{b-c}+\frac{c^{2004}-a^{2004}}{c-a}\ \text{為整數}$$

5、(1) 證明：$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$。

(2) 如果$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}+\theta$，求$\theta$。

(3) 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}\right)$。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
南區　（高雄中學）　筆試(一)【參考解答】

1. ∵ $b^2=a^2+c^2$ 且判別式 $b^2-4ac\le 0$，又已知 $\tan A=\dfrac{a}{c}$

∴ $2-\sqrt{3}\le \tan A\le 2+\sqrt{3}$，解得 $15^o\le A\le 75^o$

2. 設圓方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

∵ 過 $A(0,3)$，$B(12,-6)$ 兩點，得方程式

$$x^2+y^2+Dx+\left(\frac{4}{3}D+19\right)y-(4D+66)=0$$

令 $y=0$ 代入上式，$x^2+Dx-(4D+66)=0$ 的兩根分別是 P,Q 兩點的 x 座標

∴ $\overline{PQ}^2=(D+8)^2+200$

∵ $D=-8$，　∴圓心 $\left(4,-\dfrac{25}{6}\right)$

解得：(a) $\sqrt{200}$ ；　(b) $\left(4,-\dfrac{25}{6}\right)$

3. 設走一趟迷宮平均為 x 分鐘，則

$$x=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}+\frac{5}{3}+\frac{x}{6}+\frac{8}{3}\ \Rightarrow\ x=12\ (\text{分鐘})$$

4. $x^n=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}$

根據數學歸納法即可得證。

5. (1) $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=1$

(2) $\frac{1}{2}=\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$，得 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$，所以

$\theta=-\tan^{-1}\frac{1}{3}$。

(3) 先利用數學歸納法證明

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\ldots+\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{n+1}$$

（由(1)(2) 觀察得到），

所以答案是$\frac{\pi}{4}$。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（高雄中學）　筆試(二)試題

1、已知 $0 \le x \le \pi$，求函數 $f(x)=\sin x+\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最大值與最小值。

2、已知 A,B 兩集合各含有三個元素：$A=\{x, xy, \log(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$

且 $A=B$。則 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\ldots+(x^{2004}+\frac{1}{y^{2004}})=?$

3、設函數 $f_1(x)=|x|-1$，$f_2(x)=|f_1(x)-1|$，$f_3(x)=|f_2(x)-2|$，$f_4(x)=|f_3(x)-4|$。

試求函數 $y=f_4(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成封閉區域的面積。

4、班上有 30 名同學。今每位同學各自準備 1 份禮物，舉行摸彩交換禮物活動。經由摸彩，每位同學恰拿到 1 份禮物。試求至少有 1 人拿到自己的禮物之機率。

5、如果 P 為 ΔABC 內的一點使 ΔAPB、ΔAPC 和 ΔBPC 的面積相等，

證明：P 為 ΔABC 的重心。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（高雄中學）　筆試(二)【參考解答】

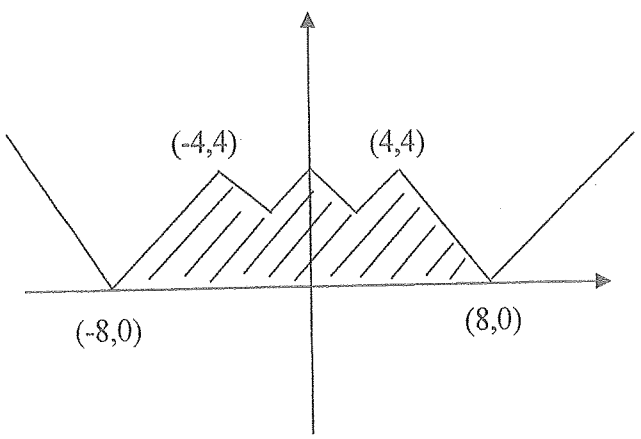
1. 設 $t=\sin x+\cos x$ $\left(-1\le t\le\sqrt{2}\right)$，解得： Max. =1； Min. =-1

2. $\because\ A=B$

   $\therefore\ x=-1=y.$　解得答案是：0

3. f_4 的圖形如左圖，

   f_4 與 x 所夾面積 =3(16)-2(14)=40



4. 利用排容原理，得 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{29!}-\frac{1}{30!}$

5. 設D、E、F分別為BC、CA、AB的中點。 如果A、P、D不共線,則

   ΔABD的面積 $\neq$ ΔAPB的面積＋ΔBPD的面積

   $=\frac{1}{3}\Delta ABC$的面積$+\frac{1}{6}\Delta ABC$的面積 $=\frac{1}{2}\Delta ABC$的面積

   矛盾，因此P在中線AD上。

   同理，P在中線BE和CF上，所以P為ΔABC的重心。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（屏東中學）　筆試(一)試題

93.11.2(二)

1、設 H，D，M 為 ΔABC 底邊 BC 上面之三點且使得 AH，AD 及 AM 分別為此三角形通過頂點 A 之高，角平分線及中線，若 AH＝24，AD＝25 且 AM＝X，試求 X 之值使

(a) $\angle BAC$ 為銳角

(b) $\angle BAC$ 鈍角

2、設 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{2004}$ 為正實數且滿足 $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2004}^2 = 2004$，試證：

$$\frac{1}{1+2a_1a_2} + \frac{1}{1+2a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{1+2a_{2004}a_1} \geq 668$$

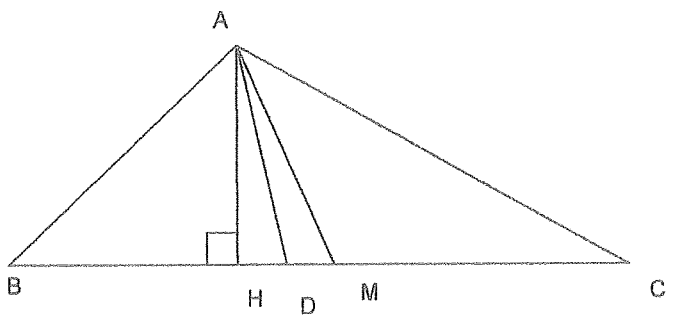
3、(a) 設一棋盤共有 10×10 方格，若一直線經過某一方格內部的點，則稱此直線「切割」該方格，試問一直線最多能「切割」此棋盤多少個方格？

(b) 若一棋盤有 m×n 方格，試問一直線最多能「切割」此棋盤多少個方格？

4、設 m 為任意整數，試證 n 個連續整數乘積 $m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)$ 必為 n！的倍數。

參考解答

1. 由條件可知道 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ ，可設 $\overline{AB} < \overline{AC}$ ，圖形如下



設 $\angle BAC = 90°$ ，則 $\Delta ABH \sim \Delta CAH$

$$\Longrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AH}} \xrightarrow{設} r$$

所以 $\overline{CH} = 24r, \overline{BH} = 24/r$

且 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ (角平分線)

則 $1 : r = (\frac{24}{r} + 7) : (24r - 7)$ 可得 $r = \frac{31}{17}$

所以 $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = \frac{24 \times 1250}{31 \times 17} = \frac{30000}{527}$

當 $\angle BAC = 90°$ ， $\overline{AM} = x = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{15000}{527}$

故 (a) 若 $25 < x < \frac{15000}{527}$ ，則 $\angle BAC$ 為銳角

(b) 若 $x > \frac{15000}{527}$ $\angle BAC$ 鈍角

2.

$$\left[(\sqrt{\frac{1}{1+2a_1a_2}})^2+(\sqrt{\frac{1}{1+2a_1a_2}})^2+\ldots+\left(\sqrt{\frac{1}{1+2a_{2004}a_1}}\right)^2\right]\cdot[(1+2a_1a_2)+\ldots.+(1+2a_{2004}a1)]$$

$$\geq(1+1+\ldots+1)^2=2004^2$$

原式 =

$$\frac{1}{1+2a_1a_2}+\frac{1}{1+2a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{1+2a_{2004}a_1}\geq\frac{2004^2}{1+2a_1a_2+1+2a_2a_3+\ldots+1+2a_{2004}a_1}$$

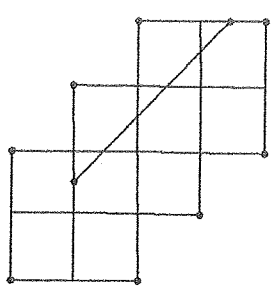
$$=\frac{2004^2}{2004+2(a_1a_2+\ldots+a_{2004}a_1)}$$

因為 $a_i^2+a_{i+1}^2\geq 2\sqrt{a_i^2a_{i+1}^2}=2a_ia_{i+1}$

所以 原式 $\geqq$ $\dfrac{2004^2}{2004+2(a_1^2+a_2^2+\ldots a_{2004}^2)}=\dfrac{2004^2}{2004+4008}=668$

3. (a) 以第一個 2×2 棋盤為準，可切割 3 格　　(如圖示)
每向左下延伸 1 格可多切割 2 格
所以共可以切割　3+2×8=19 格

(b) 以 2×2 棋盤為例，可以切割 3 格，每向下延伸
一格可多切割一格，每向左延伸一格可多切割一格
故 m×n 的棋盤 共向下延伸 (n-2)格 ，
向左延伸 (m-2)格
所以可切割 3+ (m-2)+(n-2)=m+n-1 格



4. (1) n=1， $1 \mid m$ ，對任意的正整數 m 都成立

(2) n=2， 則 m 及 m+1 必有一個偶數，則 $2! \mid m(m+1)$

(3) 設 k-1 個連續正整數的乘積為 (k-1)!之個倍數

(4) 令 $g(m)=m(m+1)\ldots.(m+k-1)$

$g(m+1)=(m+1)(m+2)\ldots.(m+k-1)(m+k)$

$mg(m+1)=(m+k)g(m)= mg(m)+kg(m)$

$m[g(m+1)-g(m)]= kg(m)$

$g(m+1)-g(m)=kg(m)/m= k(m+1)(m+2)\ldots.(m+k-1)$

由(3)可知 $(k-1)! \mid (m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)$

故 $k! \mid [g(m+1)-g(m)]$

若將 m 以 m-1，m-2，…，1 取代，上式仍成立

$\Longrightarrow g(m)=[g(m)-g(m-1)]+[g(m-1)-g(m-2)]+\ldots+[g(1)-g(0)]$

$\Longrightarrow k! \mid g(m)$

由數學歸納法得知，任意 n 個連續整數乘積為 n!的倍數。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（屏東中學）　筆試(二)試題

1. 設x為實數，求$(f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-x+1}$之最大值及最小值

2. 設x,y,z皆為實數，若方程組$\begin{cases} x^2-yz-8x+7=0 \\ y^2+z^2+yz-6x+6=0 \end{cases}$有解，求$x$的範圍。

3. 試求滿足$\sin 18^\circ+\sin x=\cos 12^\circ$的最小正$x$的度數。

4. 設n為正整數，試證：$24\mid (n^4+2n^3+11n^2+10n)$。

5. 試求所有質數p使得$p+28$與$p+56$皆為質數。

6. 正方形ABCD，$\overline{CF}\,//\,\overline{BD}$，$E$點在$\overline{CF}$上，使得DBEF四邊形為菱形。若$\angle BDF=n\angle F$，試求$n$值。

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（屏東中學）　筆試(二)【參考解答】

參考解答：

1. 令 $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-x+1}$ ，則 $(y-1)x^2-(y-3)x+y-3=0$

判別式 D≧0 ，$(y-3)^2-4(y-1)(y-3)\geq 0$

$(y-3)(3y-1)\geq 0$, $\dfrac{1}{3}\leq y\leq 3$

所以 最大值為 3，最小值為 1/3

2. 因為 $yz=x^2-8x+7$ 且 $y^2+z^2\geq 2yz$

所以

$0=y^2+z^2+yz-6x+6\geq 3yz-8x+6=3(x^2-8x+7)-6x+6=3(x^2-10x+9)$

$0\geq(x-9)(x-1)$　故 $1\leq x\leq 9$

3. $\sin 18^\circ+\sin x=\cos(30^\circ-18^\circ)$

$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 18^\circ-\dfrac{1}{2}\sin 18^\circ=\sin 42^\circ=\sin(42^\circ+360^\circ\times n)$

所以 x 最小的正度數為 42 度

4. 原式= $n^4+2n3+11n^2+10n=n(n^3+2n^2+11n+10)=n(n+1)(n^2+n+10)$

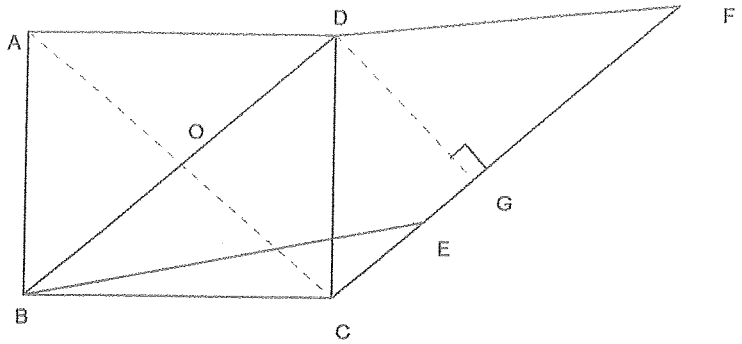
原式= $n(n+1)(n^2+n-2+12)=n(n+1)(n-1)(n+2)+12n(n+1)$

$\because 24\mid(n-1)n(n+1)(n+2)$ 且 $2\mid n(n+1)\Rightarrow 24\mid 12n(n+1)$

$\therefore 24\mid(n^4+2n^3+11n^2+10n)$

5. (i) 設 p=3k+1 => p+56=3(k+19)　(不合)(因為 p+56 是質數)
(ii) 設 p=3k-1 => p+28=3(k+9)　(不合)(因為 p+28 是質數)
由 (i)及(ii)可知 p=3k 且 p 為質數　所以 p=3

6. 連接 $\overline{AC}$ ，交 $\overline{BD}$ 於 O 點，過 D 點作 $\overline{DG} \perp \overline{CF}$ 於 G 點



因為 ABCD 為正方形 ，

所以 $\angle BOC = \angle COD = 90°, \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \overline{DG}$

因此 $\angle F = 30°$ ，故 $\angle BDF = 90° + 60° = 150° = 5\angle F$ .....n=5

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（屏東中學）　口試【試題及參考解答】

1、試求 $\cos\frac{\pi}{93}+\cos\frac{3\pi}{93}+....+\cos\frac{91\pi}{93}$ 之值

2、已知 $a_1,a_2,...,a_{2004}$ 為實數，且滿足 $a_1^2+a_2^2+...+a_{2004}^2=1$，$a_1^3+a_2^3+...+a_{2004}^3=1$，

求 $a_1+a_2+...+a_{2004}$ 之值

參考解答：

1. 令 $\cos\frac{\pi}{93}+\cos\frac{3\pi}{93}+....+\cos\frac{91\pi}{93}=\alpha$

同乘 $\sin\frac{\pi}{93}$ $\Rightarrow$ $\sin\frac{\pi}{93}\cdot\alpha=\sin\frac{\pi}{93}\cos\frac{\pi}{93}+\sin\frac{\pi}{93}\cos\frac{3\pi}{93}+...+\sin\frac{\pi}{93}\cos\frac{91\pi}{93}$

$\sin\frac{\pi}{93}\cdot\alpha=\frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{93}+\sin\frac{4\pi}{93}-\sin\frac{2\pi}{93}+\sin\frac{6\pi}{93}-\sin\frac{4\pi}{93}+...+\sin\frac{92\pi}{93}-\sin\frac{90\pi}{93})$ 可得

$\sin\frac{\pi}{93}\cdot\alpha=\frac{1}{2}\sin\frac{92\pi}{93}$　故 原式之值為 $\frac{1}{2}$

2. 由條件可知 $0\le|a_k|\le 1,\therefore a_k^2\ge a_k^3\quad\forall k$

且 $a_1^2+a_2^2+...+a_{2004}^2=a_1^3+...+a_{2004}^3$

$(a_1^2-a_1^3)+(a_2^2-a_2^3)+...+(a_{2004}^2-a_{2004}^3)=0$

所以 $a_k^3=a_k^2\Rightarrow a_k=0\ or\ 1\quad\forall k$

但 $a_1,a_2.....,a_{2004}$ 之中只能有個為 1

故 $a_1+a_2+...+a_{2004}=1$

從整數三角形談起

左太政 /國立高雄師範大學數學系

預備知識:三角函數及其性質、正弦定理、餘弦定理、面積公式、海龍公式

一、動機:你能否找出所有三邊長都是正整數的直角三角形?

『備註』:本問題可轉化為解二次不定方程式$x^2+y^2=z^2$,其中x,y,z 為整數。

問題 1. 試找出滿足方程式$x^2+y^2=z^2$的所有可能正整數解(x,y,z),其中x,y,z為互質,此種解稱為此方程式的本原解 (primitive solutions)。
(提示:$x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2$ 或$x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$, 式中$0<n<m$, m 與n互質,且$m+n$ 為奇數。)

問題 2. 你是否能求出此方程式的所有可能整數解(x,y,z)?

問題 3. 試求出單位圓上的所有有理點(x,y) (即x與y坐標都是有理數)。

問題 4. 試解不定方程式:

(1) $x^4+y^4=z^2$;

(2) $x^2+y^2=z^4$。

(3) $x^4+y^2=z^2$。

(4) $x^2+3y^2=z^2$。

問題 5. 試證下列方程式無整數解(x,y,z),其中$xyz\neq 0$:

(1) $x^4+y^2=z^4$。

(2) $x^4+4y^4=z^2$

二、商高三角形

求方程式$x^2+y^2=z^2$的所有可能正整數解的幾何意義就是求邊長都是整數的直角三角形,此種三角形稱為「商高三角形」。

問題 1. 試證: 商高三角形的面積一定不是整數的平方。

問題 2. 設$n\geq 3$,試證:必有一個商高三角形其一股長正好是n。

三、費瑪最後定理(Fermat's Last Theorem):

十七世紀法國一位大數學家費瑪(Fermat, 1601-1665) 過世後,他兒子在整理他的遺稿時發現了許多數學的猜想,其中最著名即為方程式 $x^n+y^n=z^n\ (n\geq 3)$ 沒有正整數解 (x,y,z),當時稱為「費瑪最後問題」。關於此方程式:

(1) 當$n=1$時,此方程式有無限多組正整數解。

(2)當$n=2$時,即為商高定理的方程式,有無限多組正整數解(至少有基本畢氏數組,即 $x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$,其中$m,n$為互質的正整數)。

(3) 當 $n=3$ 時, 由近代偉大數學家歐拉 (Euler, 1707-1783)證明沒有正整數解。

(4) 當 $n=4$ 時, 由阿貝爾 (Abel, 1802-1829)證明沒有正整數解。

(5) 其後一直未能完全解決本問題, 直至 1993 年 6 月 23 日由美國普林斯頓大學數學系 Wiles(1953-)教授在英國劍橋大學牛頓學院發表一系列有關費瑪最後問題的證明。但當他正式發表時, 上有少許內容被質疑有漏洞, 他又花了一年時間研究, 其間幾乎想放棄證明, 直到 1994 年 9 月 19 日終於完成。於 1995 年他證明費瑪最後定理的文章題目為"Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem", 正式被登在著名數學期刊"Annals of Mathematics" 上, 費瑪最後問題歷經三百多年正式被解決。

四、海龍公式(Heron formula)

古希臘 Alexandria 城的數學家 Heron(或稱為 Hero, 西元 10-75), 他專長於幾何及力學, 於西元 60 年時發表海龍公式。

1. 設四邊形內接於一圓, 若其邊長分別為 a,b,c,d, 試求此四邊形的面積。(Brahmagupta 公式)

2. 設四邊形 $ABCD$ 的四邊長分別為 a,b,c,d, 試求此四邊形的面積。

(提示: $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2(\frac{A+C}{2})}$)

3. 是利用海龍公式證明勾股定理。

四、海龍三角形(Heron Triangle)

『定義』:凡是面積仍是正整數的整數三角形稱為「海龍三角形」。

例如:三角形的三邊長分別為 3,4,5 是海龍三角形。

1. 已知海龍三角形的兩邊長分別為 9,10, 試求其第三邊長。

2. 直角三角形的三邊長分別為 a,b,c, 其中 c 為斜邊長, 已知 a,b,c 為正整數, 且其和等於 1000, 試求 a,b,c 所有可能的值。

3. 已知一直角整數三角形的三邊長為兩兩互質, 若其面積值為 630, 且周長為 126, 試求此三角形的三邊長。

4. 如果三角形的三邊長分別為 3,4,5, 則面積為 6, 我們發現此三角形的三邊長與面積恰好是連續整數。試求滿足這種條件的所有海龍三角形。

5. 試求周長是 12 的所有海龍三角形。

6. 試求周長一定但至少有兩種不同的海龍三角形之最小周長。

7. 試求周長是 100 單位的五個不同的海龍三角形。

8. 試求周長是 84 的所有海龍三角形。

9. 能否找出所有的海龍三角形?

10. 試證: 海龍三角形的面積必為 6 的倍數。

五、尤拉三角形(Eulerian Triangle)

『定義』:凡是三中線長都是正整數的整數三角形稱為『尤拉三角形』。例如:三角形的三邊長分別為 136, 170, 174 時, 其三中線長分別為 158, 127, 131。

1. 設三角形的三邊長分別為 a,b,c, 若三中線長為 x,y,z, 試以 a,b,c 表示 x,y,z.
2. 設 n 為正整數，已知三角形的三中線長分別為 $n,n+1,n+2$, 試求其三邊長。
3. 能否找出所有的尤拉三角形?

《思考題》:

1. 試找出所有的整數直角三角形使其面積數值等於周長數值。
2. 試找出所有的整數三角形使其面積數值等於周長數值。
3. 試找出所有的整數三角形使其周長數值是面積數值兩倍（或其它倍數)。
4. 試找出四邊之長都是整數且其面積數值等於周長數值的所有矩形。
5. 試找出四邊之邊長都是整數, 其周長數值是面積數值兩倍（或其它倍數）的所有矩形。

函數方程講義—線性遞迴方程式

張幼賢提供

2005/01/01

§1. 一階線性遞迴方程

定義：可以表示為 $a_1f(n)+a_2f(n+1)+a_3f(n+2)+\cdots+a_{k+1}f(n+k)+b=0$，其中 a_1，a_2，…，a_{k+1} 及 b 為給定常數的方程式稱為線性遞迴方程。

定理 1：若 $f(1)=a$，則一階線性遞迴方程

$$f(n+1)=cf(n)+b \tag{1}$$

其中 a，b，c 為常數的解為

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{ac^n+(b-a)c^{n-1}-b}{c-1} & \text{如果 } c\neq 1\\ a+(n-1)b & \text{如果 } c=1\end{cases} \tag{2}$$

【解】：

（Ⅰ）首先我們來證明 $c\neq 1$ 的情形，我們將(1)式改寫為

$$f(n+1)+p=c[f(n)+p]$$

比較它和(1)的係數，可知 $cp-p=b$，即 $p=\dfrac{b}{c-1}$

$$\Rightarrow f(n+1)+\frac{b}{c-1}=c\left[f(n)+\frac{b}{c-1}\right]$$

這表示 $\left\{f(n)+\dfrac{b}{c-1}\right\}$ 為一個以 c 為公比的等比數列。首項為

$f(1)+\dfrac{b}{c-1}=a+\dfrac{b}{c-1}$，$f(n)+\dfrac{b}{c-1}$ 為第 n 項，所以

$$f(n)+\frac{b}{c-1}=(a+\frac{b}{c-1})c^{n-1} \tag{3}$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{ac^n+(b-a)c^{n-1}-b}{c-1}\quad (\text{當 } c\neq 1)$$

（Ⅱ）若 $c=1$，則(1)式為 $f(n+1)=f(n)+b$

$$\Rightarrow f(n+1)-f(n)=b$$

所以 $\{f(n)\}$ 是一各以 b 為公差，$f(1)=a$ 為首項的等差數列；因而

$f(n)=f(1)+(n-1)b=a+(n-1)b$

Example 1：設 f 為定義在所有正整數上的實函數，$f(1)=6$ 且

$$2f(n+1)-3f(n)=6 \tag{4}$$

試求 $f(n)=?$

【解】：將(4)式改寫為一階線性遞迴方程的形式，$f(n+1)=\frac{3}{2}f(n)+3$

由公式(2)可知 (其中 $a=6,\ c=\frac{3}{2},\ b=3$)

$$f(n)=\frac{ac^n+(b-a)c^{n-1}+b}{c-1}=\frac{6\cdot(\frac{3}{2})^n+(3-6)\cdot(\frac{3}{2})^{n-1}-3}{\frac{3}{2}-1}$$

$$\Rightarrow f(n)=8\cdot(\frac{3}{2})^n-6.$$

【註】一個一階線性遞迴方程式的解，不但依賴方程式本身，而且還依賴於初始條件。

方程式(1)的解 $f(n)$，可以看成是一個遞迴數列的通項公式。因此，我們將依數列的分類，把方程式(1)的解 $f(n)$ 分成，常數，無界，有極限，振動 4 種類型：若 $f(1)=a$，則一階線性遞迴方程(1)的解 $f(n)$ 與係數 a，b，c 的關係如下：

(a) 當 $c\neq 1$ 且 $a=\frac{b}{1-c}$ 或 $c=1$ 且 $b=0$ 時，$f(n)$ 為常數函數。

(b) 當 $|c|>1$ 且 $a\neq\frac{b}{1-c}$ 或 $c=1$ 且 $b\neq 0$ 時，$f(n)$ 隨 n 的增加其絕對質 $|f(n)|$ 無界。(i.e. $\lim_{n\to\infty}|f(n)|=\infty$)

(c) 當 $|c|<1$ 且 $a\neq\frac{b}{1-c}$ 時，則 $\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{b}{1-c}$。

(d) 當 $c=-1$ 且 $a\neq\frac{b}{1-c}$ 時，$f(n)$ 是以常數為振幅之振動。

【證明】：當 $f(1)=a$，由(3)可知

$$f(n)=\left[a-\frac{b}{1-c}\right]c^{n-1}+\frac{b}{1-c}\text{，當 } c\neq 1 \tag{5}$$

且 $f(n)=a+(n-1)b$ ，當 $c=1$。 (6)

(a) 因此，當 $c\neq 1$，$a=\frac{b}{1-c}$ 時，$f(n)=\frac{b}{1-c}$ 為一常數函數且當 $c=1$，$b=0$ 時，$f(n)=a$ 亦為一常數函數。

(b) 當 $|c|>1$ 時，$\Rightarrow|c^{n-1}|$ 將隨 n 的增大而趨近於無限大，故當

$a \neq \frac{b}{1-c}$ (i.e. $a - \frac{b}{1-c} \neq 0$)，而 $\frac{b}{1-c}$ 為一定數，所以由(5)式可知 $|f(n)|$ 也隨 n 的增大而趨近於無限大(cf.(5))；當 $c=1$ 且 $b \neq 0$，由(6)可知 $|f(n)|$ 也隨 n 的增大而趨近於無限大。

(c) 當 $|c|<1$ 時，$|c^{n-1}|$ 將隨 n 的增大而趨近於 0，所以當 $a \neq \frac{b}{1-c}$ (i.e. $a - \frac{b}{1-c} \neq 0$)

且 $\frac{b}{1-c}$ 為一常數，由(5)可知，$f(n)$可隨 n 的增大而趨於 $\frac{b}{1-c}$。

(d) 當 $c=-1$，且 $a \neq \frac{b}{1-c}$ 時，由(5)可知

$$f(n)=\begin{cases}(a-\frac{b}{1+1})1+\frac{b}{1+1}=a, & \text{當}n\text{為奇數時}\\ (a-\frac{b}{1+1})(-1)+\frac{b}{1+1}=b-a, & \text{當}n\text{為偶數時}\end{cases}$$

所以 $f(n)$是交錯的值為 a 或 $b-a$。

【註】：通常若 $f(n) \to d$ as $n \to \infty$，d 為一常數，我們稱這種遞迴方程為穩定的遞迴方程。由上述的(c)可知，只有在 $|c|<1$ 或 $f(n)$ 為常數函數時，(1)才是穩定的遞迴方程。

Example 2：試解變係數的一階遞迴方程式

$$nf(n)-(n-1)f(n+1)=1 \quad \text{且} \quad f(2)=3, \quad n \geqq 2 \tag{1}$$

【解】：以 $n+1$ 代(1)式中的 n 可得

$$(n+1)f(n+1)-nf(n+2)=1 \tag{2}$$

(2)-(1):

$$(n+1)f(n+1)-nf(n+2)-nf(n)+(n-1)f(n+1)=0$$

$$\Rightarrow nf(n+2)-(n+1)f(n+1)=(n-1)f(n+1)-nf(n)$$

將上式兩端加 $f(n+1)$可得

$$nf(n+2)-nf(n+1)=nf(n+1)-nf(n)$$

$$\Rightarrow f(n+2)-f(n+1)=f(n+1)-f(n)$$

$$\Rightarrow f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1)=\cdots=f(3)-f(2) \tag{3}$$

在(1)式中，取 $n=2$，可得

$$2f(2)-f(3)=1 \Rightarrow f(3)=2f(2)-1=5 \text{。}$$

所以由(3)式可知：

$f(n+1)-f(n)=f(3)-f(2)=5-3=2$。

這表示$\{f(n)\}$是以$f(2)=3$為首項，公差為2的等差數列。$f(n)$是這個數列的第$n-1$項。因此，

$f(n)=3+(n-2)2=2n-1$，$\forall n \geq 2$。

*易證驗$f(1)=1$，也滿足(1)式，所以

$f(n)=2n-1$, $\forall n \in N$.

§2. 二階線性遞迴方程式

對於二階線性遞迴方程式，只有係數為常數的情形才能保證有解，並可用不同的方法求解。本節主要是欲介紹利用二階常係數遞迴方程式的特徵方程式來解二階常係數遞迴方程式的方法。

首先，我們來看如何求二階齊次遞迴方程

$$f(n+2)=pf(n+1)+qf(n) \qquad (1)$$

的解，其中，p 和 q 都是常數且 $q \neq 0$。顯然，如果給定兩個初始條件 $f(1)=a, f(2)=b$，就可由方程式(1)依次求出$f(3), f(4), \cdots$的唯一的值。這也就是說，在給初始條件下，方程式的解$f(n)$是唯一的。

如果在不考慮初始條件時，(1)的解可能並不是唯一的；不過此時我們有下列所謂 super- position principle：

定理1：如果函數$f_1(n)$及$f_2(n)$都滿足方程式(1)，則對任意的常數c_1, c_2；

$c_1 f_1(n)+c_2 f_2(n)$也滿足(1)。

【證明】：因為$f_1(n)$及$f_2(n)$都是方程式(1)的解

$$\Rightarrow f_1(n+2)=pf_1(n+1)+qf_1(n)$$

$$f_2(n+2)=pf_2(n+1)+qf_2(n)$$

$$\therefore c_1 f_1(n+2)+c_2 f_2(n+2)=c_1\left[pf_1(n+1)+qf_1(n)\right]+c_2\left[pf_2(n+1)+qf_2(n)\right]$$

$$=p\left[c_1 f_1(n+1)+c_2 f_2(n+1)\right]+q\left[c_1 f_1(n)+c_2 f_2(n)\right]$$

這也就是說$c_1 f_1(n)+c_2 f_2(n)$也為方程式(1)的解。

當然$f(n)\equiv 0$滿足方程式(1)，我們希找到非恆為0的函數。如果存在兩個等比數列的通項公式$f_1(n)=r_1^n$和$f_2(n)=r_2^n$均滿足方程式(1)，則對於任意的常數c_1和c_2，$c_1 r_1^n+c_2 r_2^n$也應滿足方程式(1)。我們現在來看看，是否可能存在這樣的等比數列呢？

如果存在等比數列的通項公式$g(n)=r^n$ $(r \neq 0)$, 滿足方程式(1)，則

$$r^{n+2}=pr^{n+1}+qr^n \text{。}$$

因為$r^n \neq 0$，所以$r^2=pr+q$；即

$$r^2-pr-q=0 \qquad (2)$$

$$r^2 = r+1$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由定理 2，可知(5)的解為

$$f(n) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

其中 c_1，c_2 滿足

$$\begin{cases} f(1) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \\ f(2) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f(n) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad (6)$$

【註】：如果我們將初始條件改為 $f(1)=f(2)=1$，則

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right] \quad (7)$$

此為著名的菲波那奇數列。

定理 3：如果特徵方程式(2)有兩個相等的實根 r_0，則方程式(1)滿足初始條件 $f(1)=a$，$f(2)=b$ 的解為

$$f(n) = (c_1 + nc_2)r_0^{n-1} \quad (8)$$

其中 c_1, c_2 滿足方程組

$$\begin{cases} f(1) = c_1 + c_2 = a \\ f(2) = (c_1 + 2c_2)r_0 = b \end{cases} \quad (9)$$

【證明】：因為 $r^2 - pr - q = 0$ 有重根 r_0

$\Rightarrow p^2 + 4q = 0$ 且 $r_0 = \frac{p}{2}$。

由 c_1, c_2 之定義，顯然 $f(1) = c_1 + c_2$，$f(2) = (c_1 + 2c_2)r_0$

設 $n = k-1$ 及 $n = k$ 時，下列兩式成立：

$$f(k-1) = c_1 r_0^{k-2} + (k-1)c_2 r_0^{k-2},$$

$$f(k) = c_1 r_0^{k-1} + kc_2 r_0^{k-1};$$

則當 $n=k+1$ 時，由(1)式可知

$$f(k+1)=pf(k)+qf(k-1)$$

$$=p\left[c_1r_0^{k-1}+kc_2r_0^{k-1}\right]+q\left[c_1r_0^{k-2}+(k-1)c_2r_0^{k-2}\right]$$

$$=c_1(pr_0^{k-1}+qr_0^{k-2})+c_2\left[pkr_0^{k-1}+q(k-1)r_0^{k-2}\right]$$

$$=c_1r_0^k+c_2\left[2kr_0^k-(k-1)r_0^k\right]$$

$$(\because p=2r_0, q=-r_0^2)$$

$$=\left[c_1+(k+1)c_2\right]r_0^k$$

所以由數學歸納法可知，對所有的 $n\in N$ ，

$f(n)=(c_1+nc_2)r_0^{n-1}$ 都成立。

反之，因為

$$\begin{cases} f(n+1)=\left[c_1+(n+1)c_2\right]r_0^n \\ f(n+2)=\left[c_1+(n+2)c_2\right]r_0^{n+1} \\ r_0^{n+2}=pr_0^{n+1}+qr_0^n \\ p=2r_0, q=-r_0^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow pf(n+1)+qf(n)$$

$$=p\left[c_1+(n+1)c_2\right]r_0^n+q\left[c_1+nc_2\right]r_0^{n-1}$$

$$=2\left[c_1+(n+1)c_2\right]r_0^{n+1}-\left[c_1+nc_2\right]r_0^{n+1}$$

$$=\left[c_1+(n+2)c_2\right]r_0^{n+1}$$

$$=f(n+2)$$

所以 $f(n)=(c_1+nc_2)r_0^{n-1}$ 即為其解。

Example 4：設 $f(1)=1, f(2)=2$ 且

$$f(n+2)=f(n+1)-\frac{1}{4}f(n) \qquad (10)$$

求 $f(n)=?$

【解】：(10)的特徵方程式為

$$r^2=r-\frac{1}{4}$$

有重根 $r_0=\frac{1}{2}$ ，故依定理 3，方程式(10)的解為

$f(n)=[c_1+nc_2](\frac{1}{2})^{n-1}$，其中 c_1,c_2 滿足

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ (c_1+2c_2)(\frac{1}{2})=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1=-2, c_2=3$$

$$\therefore f(n)=(-2+3n)(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{3n-2}{2^{n-1}}。$$

對於非齊次的二階線性遞迴常係數方程

$$f(n+2)=pf(n+1)+qf(n)+R \tag{11}$$

是先將其通過適當的轉換，化為齊次方程後再應用前面的方法來解。

定理 4：如果在非齊次的二階線性遞迴常係數方程式(11)中，$p+q\neq 1$，則在令

$$t=\frac{R}{1-(p+q)}, g(n)=f(n)-t \tag{12}$$

將可得到二階齊次方程式

$$g(n+2)=pg(n+1)+qg(n)$$

【證明】：由(12)可得

$t=pt+qt+R$，$f(n)=g(n)+t$

將此代入(11)式，可得

$$g(n+2)+t=p[g(n+1)+t]+q[g(n)+t]+R$$

$$\Rightarrow g(n+2)=pg(n+1)+qg(n)+(pt+qt+R)-t$$

$$\Rightarrow g(n+2)=pg(n+1)+qg(n)。$$

Example 5：設 $f(1)=1, f(2)=1$ 且

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n)+1 \tag{13}$$

求 $f(n)=?$

【解】：在方程式(13)中，$p+q\neq 1$，$R=1$。

按(12)，令 $t=\frac{R}{1-(p+q)}=\frac{1}{1-2}=-1$

$$g(n)=f(n)-t=f(n)+1$$

$$\Rightarrow g(n+2)=g(n+1)+g(n)$$

且 $g(1)=f(1)+1=2, g(2)=f(2)+1=2$

仿 *Example* 3，可求得

$$g(n)=\frac{2}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]。$$

所以 $f(n)=g(n)-1=\frac{2}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]-1$。

【註】若非齊次二階線性遞迴常係數方程式

$$f(n+2)=pf(n+1)+qf(n)+R \tag{11}$$

中，$p+q=1$ 且 $f(1)=a, f(2)=b$ 則

(I)當 $q\neq -1$，取 $t=\frac{R}{1+q}$ 可得

$$f(n)=a+(n-1)t+(b-a-t)\frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}。$$

(II)當 $q=-1$ 時，可求得

$$f(n)=a+\frac{1}{2}[2(b-a)+(n-2)R](n-1)。$$

【證明】：因為 $p+q=1$，所以(11)式可以改寫為

$$(p+q)f(n+2)=pf(n+1)+qf(n)+R。$$

$$\Rightarrow p[f(n+2)-f(n+1)]=-q[f(n+2)-f(n+1)]$$
$$-q[f(n+1)-f(n)]+R，$$

$$\Rightarrow (p+q)[f(n+2)-f(n+1)]=-q[f(n+1)-f(n)]+R，$$

即

$$f(n+2)-f(n+1)=-q[f(n+1)-f(n)]+R。 \tag{a}$$

令 $g(n)=f(n+1)-f(n)$ (b)

則原方程式變為一階線性遞迴方程

$$g(n+1)=-qg(n)+R \tag{c}$$

(I)當 $q\neq -1$，令 $t=\frac{R}{1+q}$，$h(n)=g(n)-t=g(n)-\frac{R}{1+q}$ (d)

將此代入(c)式可得

$$h(n+1)+\frac{R}{1+q}=-q\left[h(n)+\frac{R}{1+q}\right]+R$$

$$\Rightarrow h(n+1)=-qh(n)$$

$$\therefore h(n)=h(1)(-q)^{n-1}=[g(1)-t](-q)^{n-1}$$
$$=[f(2)-f(1)-t](-q)^{n-1}$$
$$=(b-a-t)(-q)^{n-1}$$

$$\Rightarrow g(n)=h(n)+t=(b-a-t)(-q)^{n-1}+t=f(n+1)-f(n)$$

因此，$f(n)=f(1)+[f(2)-f(1)]+\cdots+[f(n)-f(n-1)]$

$$=f(1)+g(1)+g(2)+\cdots+g(n-1)$$
$$=a+[(b-a-t)+t]+[(b-a-t)(-q)+t]+\cdots$$
$$+[(b-a-t)(-q)^{n-2}+t]$$

我們稱(2)為二階齊次線性遞迴方程的“特徵方程式”，如能解此方程式(2)，則可找到等比數列；因而可求出方程式(1)的解。

定理 2：如果特徵方程式(2)有兩個相異根(實數或複根)r_1及r_2，則滿足初始條件 $f(1)=a$，$f(2)=b$ 為方程式(1)的解為

$$f(n)=c_1r_1^n+c_2r_2^n,\ \text{其中}\ c_1,c_2\ \text{為固定的常數。} \tag{3}$$

事實上，c_1,c_2 是由

$$\begin{cases} a=c_1r_1+c_2r_2 \\ b=c_1r_1^2+c_2r_2^2 \end{cases} \tag{4}$$

所決定的。

【證明】：(I)首先我們利用數學歸納法，證明(3)式對所有的 $n\in N$ 均成立。

顯然，

$f(1)=c_1r_1+c_2r_2=a$ ， $f(2)=c_1r_1^2+c_2r_2^2=b$ 成立

設 $n=k$-1, $n=k$ 時(3)成立(或 $n\leqq k$ 時(3)式成立)

i.e., $f(k-1)=c_1r_1^{k-1}+c_2r_2^{k-1}$ ， $f(k)=c_1r_1^k+c_2r_2^k$ 成立

當 $n=k$+1 時，由(1)及(2)知

$$\begin{aligned} f(k+1)&=pf(k)+qf(k-1) \\ &=p(c_1r_1^k+c_2r_2^k)+q(c_1r_1^{k-1}+c_2r_2^{k-1}) \\ &=c_1r_1^{k-1}(pr_1+q)+c_2r_2^{k-1}(pr_2+q) \\ &=c_1r_1^{k+1}+c_2r_2^{k+1} \end{aligned}$$

所以對一切的 $n\in N$ ， $f(n)=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ 都成立。

(II)我們現在來證明(3)滿足方程式(1)

由方程式(3)與(2)可知：

$f(n+1)=c_1r_1^{n+1}+c_2r_2^{n+1}$ ， $f(n+2)=c_1r_1^{n+2}+c_2r_2^{n+2}$

且 $r_1^{n+2}=pr_1^{n+1}+qr_1^n$ ， $r_2^{n+2}=pr_2^{n+1}+qr_2^n$

因此，

$$\begin{aligned} pf(n+1)+qf(n)&=p(c_1r_1^{n+1}+c_2r_2^{n+1})+q(c_1r_1^n+c_2r_2^n) \\ &=c_1(pr_1^{n+1}+qr_1^n)+c_2(pr_2^{n+1}+qr_2^n) \\ &=c_1r_1^{n+2}+c_2r_2^{n+2} \\ &=f(n+2) \end{aligned}$$

故 $f(n)=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ 為(1)的解。

Example 3：設 $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$，$f(1)=1$，$f(2)=2$ (5)

求 $f(n)$=？

【解】：在此時，$p=q=1$，所以(5)的特徵方程式為

$$= a + (n-1)t + (b-a-t)\frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q} \qquad (e)$$

(Ⅱ)當 $q=-1$，則 $p=2$ 且(c)變為

$$g(n+1) = g(n) + R$$

$$\Rightarrow g(n) = g(1) + (n-1)R = (b-a) + (n-1)R$$

$$f(n) = f(1) + [f(2) - f(1)] + \cdots + [f(n) - f(n-1)]$$

$$= f(1) + g(1) + \cdots + g(n-1)$$

$$= a + (b-a) + [(b-a) + R] + \cdots + [(b-a) + (n-2)R]$$

$$= a + (n-1)(b-a) + R\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= a + \frac{1}{2}[2(b-a) + (n-2)R](n-1) \qquad (f)$$

§3. 從二階到一階的轉換

二階線性遞迴方程的另一個求解方法是設法將它轉換為一階線性遞迴方程式之後，再依一階線性遞迴方程式的解法求解。

Example 6：設 $f(1)=1, f(2)=-2$ 且滿足

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n) \qquad (1)$$

求 $f(n)=?$

【解】：設方程式(1)可改寫為

$$f(n+2) - \alpha f(n+1) = \beta[f(n+1) - \alpha f(n)]$$

即 $f(n+2) = (\alpha+\beta)f(n+1) - \alpha\beta f(n)$

將此式與(1)比較係數可得

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

所以 α, β 為 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 的兩個根。

解此方程組，可以得到兩組解

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \beta_1 = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \alpha_2 = 3 \\ \beta_2 = 2 \end{cases}$$

於是可得

$$f(n+2) - 2f(n+1) = 3[f(n+1) - 2f(n)] \qquad (2)$$

$$\text{或} f(n+2) - 3f(n+1) = 2[f(n+1) - 3f(n)] \qquad (3)$$

(2)式表示 $\{f(n+2) - 2f(n+1)\}$ 是一個以 3 為公比的等比數列，且其首項為 $f(2) - 2f(1) = -2 - 2 = -4$ ；

而 $f(n+1)-2f(n)$ 為此數列的第 n 項

$\Rightarrow f(n+1)-2f(n)=(-4)\cdot 3^{n-1}$ (4)

同理，由(3)式可得 $\{f(n+1)-3f(n)\}$ 是以 2 為公比，而以

$f(2)-3f(1)=-2-3=-5$ 為首項的等比數列

$\Rightarrow f(n+1)-3f(n)=(-5)\cdot 2^{n-1}$ (5)

(4)-(5)：

$f(n)=5\cdot 2^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}$ 。

【註】：在上例中，顯然只要 $\alpha\neq\beta$ $(i.e.p^2+4q\neq 0)$，均可用此法解出。如果 $\alpha=\beta$ $(i.e.p^2+4q=0)$，則(4)與(5)是同一個式子，所以不可能用此方法解出。一般而言，我們有下列之結果：

定理 1：如果二階線性遞迴方程

$f(n+2)=pf(n+1)+qf(n)$ (6)

滿足 $f(1)=a, f(2)=b$，則

(I)當 $p^2+4q\neq 0$ 時，

$$f(n)=\frac{(b-\alpha_2 a)\beta_2^{n-1}-(b-\alpha_1 a)\beta_1^{n-1}}{\alpha_1-\alpha_2} \quad (7)$$

其中 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$ 為方程組

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha\beta=-q\end{cases}$$

的兩組解。

(II)當 $p^2+4q=0$ 時

$$f(n)=a(\frac{p}{2})^{n-1}+(n-1)(b-\frac{p}{2}a)(\frac{p}{2})^{n-2} \quad (8)$$

【證明】：(I)設方程式(6)可改寫為

$f(n+2)-\alpha f(n+1)=\beta[f(n+1)-\alpha f(n)]$

$\Rightarrow f(n+2)=(\alpha+\beta)f(n+1)-\alpha\beta f(n)$

比較此式與(6)的係數可得：

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha\beta=-q\end{cases}$$

因為 $p^2+4q\neq 0$

所以此方程組有兩組不同的解 (α_1,β_1) 及 (α_2,β_2)

於是

$f(n+2)-\alpha_1 f(n+1)=\beta_1[f(n+1)-\alpha_1 f(n)]$ (9)

$f(n+2)-\alpha_2 f(n+1)=\beta_2[f(n+1)-\alpha_2 f(n)]$ (10)

由(9)可知 $\{f(n+1)-\alpha_1 f(n)\}$ 是以 β_1 為公比，以

$f(2)-\alpha_1 f(1)=b-\alpha_1 a$ 為首項的等比數列，

$$\Rightarrow f(n+1)-\alpha_1 f(n)=(b-\alpha_1 a)\beta_1^{n-1} \tag{11}$$

同理，由(10)式可得

$$f(n+1)-\alpha_2 f(n)=(b-\alpha_2 a)\beta_2^{n-1} \tag{12}$$

(12)-(11)：

$$(\alpha_1-\alpha_2)f(n)=(b-\alpha_2 a)\beta_2^{n-1}-(b-\alpha_1 a)\beta_1^{n-1}$$

$$\therefore f(n)=\frac{(b-\alpha_2 a)\beta_2^{n-1}-(b-\alpha_1 a)\beta_1^{n-1}}{\alpha_1-\alpha_2}$$

(Ⅱ)如果 $p^2+4q=0\Rightarrow q=-(\frac{p}{2})^2$

所以(6)式可改寫為

$$f(n+2)=pf(n+1)-(\frac{p}{2})^2 f(n)$$

$$\Rightarrow f(n+2)-\frac{p}{2}f(n+1)=\frac{p}{2}\left[f(n+1)-\frac{p}{2}f(n)\right]$$

所以 $f(n+1)-\frac{p}{2}f(n)$ 是以 $\frac{p}{2}$ 為公比，$f(2)-\frac{p}{2}f(1)=b-\frac{p}{2}a$ 為首項之等比數列的第 n 項

$$\therefore f(n+1)-\frac{p}{2}f(n)=(b-\frac{p}{2}a)(\frac{p}{2})^{n-1}$$

將此式兩邊除以 $(\frac{p}{2})^{n+1}$，可得

$$(\frac{2}{p})^{n+1}f(n+1)-(\frac{2}{p})^n f(n)=(b-\frac{p}{2}a)(\frac{2}{p})^2$$

所以 $(\frac{2}{p})^n f(n)$ 是以 $(b-\frac{p}{2}a)(\frac{2}{p})^2$ 為公差，以 $(\frac{2}{p})f(1)$ 為首項之等差數列的第 n 項，

$$\therefore (\frac{2}{p})^n f(n)=\frac{2}{p}a+(n-1)(b-\frac{p}{2}a)(\frac{2}{p})^2$$

$$\Rightarrow f(n)=a(\frac{p}{2})^{n-1}+(n-1)(b-\frac{p}{2}a)(\frac{p}{2})^{n-2}$$

Example 7：設 $f(1)=1, f(2)=2$ 且

$$f(n+2)=f(n+1)-\frac{1}{4}f(n) \tag{13}$$

求 $f(n)=?$

【解】：因為 $p^2+4q=1+4(-\frac{1}{4})=0$

可直接代公式(8)而得解。不過此處我們希望能直接將(13)變形，而求解。

將(13)改寫為

$$f(n+2)-\frac{1}{2}f(n+1)=\frac{1}{2}\left[f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)\right]$$

所以 $f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)$ 是以 $\frac{1}{2}$ 為公比，

$f(2)-\frac{1}{2}f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 為首項之等比數列的第 n 項，

$$\therefore f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)=(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2^{n+1}f(n+1)-2^n f(n)=6$$

這表示 $2^n f(n)$ 是以 6 為公差，$2f(1)=2$ 為首項之等差數列的第 n 項

$$\Rightarrow 2^n f(n)=2+(n-1)6=6n-4$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{6n-4}{2^n}=\frac{3n-2}{2^{n-1}}。$$

在應用定理 1 時，可能會遇到 α,β 為共軛複數的情形，最好將其化成 $re^{i\theta}$ 及 $re^{-i\theta}$ 之形式，然後再將其結果化成三角函數式，以使得表達式更簡明。

Example 8：設 $f(1)=0, f(2)=1$ 且

$$f(n+2)=2f(n+1)-2f(n) \tag{14}$$

求 $f(n)=?$

【解】：$p^2+4q=2^2+4(-2)=-4\neq 0$

且 $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=2\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=1+i\\ \beta_1=1-i\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha_2=1-i\\ \beta_2=1+i\end{cases}$$

可化成

$$\begin{cases}\alpha_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\\ \beta_1=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha_2=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\\ \beta_2=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\end{cases}$$

將此代入(7)式，可得

$$f(n)=\frac{\left[(1-0)(\sqrt{2})^{n-1}e^{(n-1)\frac{\pi}{4}i}\right]-\left[(1-0)(\sqrt{2})^{n-1}e^{-(n-1)\frac{\pi}{4}i}\right]}{\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2})^{n-1} i \sin\frac{(n-1)\pi}{4}}{2\sqrt{2} i \sin\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{n-1} \sin\frac{(n-1)}{4}\pi$$

Example 9：若 $f(1)=1, f(2)=1, f(3)=2$ 且

$$f(n+3)=\frac{4}{3}f(n+2)+\frac{1}{3}f(n+1)-\frac{2}{3}f(n) \tag{15}$$

求 $f(n)=?$

【解】：由(15)可得

$$3f(n+3)-4f(n+2)-f(n+1)+2f(n)=0$$

$$\Rightarrow 3[f(n+3)-f(n+2)]-[f(n+2)-f(n+1)]-2[f(n+1)-f(n)]=0$$

令 $g(n)=f(n+1)-f(n)$ 代入上式則可得

$$3g(n+2)-g(n+1)-2g(n)=0$$

$$\Rightarrow g(n+2)-g(n+1)=-\frac{2}{3}[g(n+1)-g(n)]$$

由此可知 $g(n+1)-g(n)$ 是以 $-\frac{2}{3}$ 為公比，以

$g(2)-g(1)$ 為首項之等比數列的第 n 項，

$$g(2)-g(1)=[f(3)-f(2)]-[f(2)-f(1)]$$

$$=(2\text{-}1)\text{-}(1\text{-}1)=1$$

$$\therefore g(n+1)-g(n)=(-\frac{2}{3})^{n-1}$$

$$\Rightarrow g(n)=\frac{3}{5}\left[1-(-\frac{2}{3})^{n-1}\right]$$

$$i.e.,\ f(n+1)-f(n)=\frac{3}{5}\left[1-(-\frac{2}{3})^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{25}\left[1+15n+9(-\frac{2}{3})^{n-1}\right]。$$

§4. 分式線性遞迴方程

現在我們來看另外一類常見的遞迴方程，它的一般形式為

$$f(n+1)=\frac{cf(n)+d}{af(n)+b} \tag{1}$$

其中 a,b,c,d 都是常數。

考慮 $r=\frac{cr+d}{ar+b}$ 可得 r 的一元二次方程

$$ar^2+(b-c)r-d=0 \tag{2}$$

我們稱此為方程式(1)的特徵方程。(2)有相異根或重根兩種情形，我們可得下列之結論：

定理 1：(I)若 $f(1)=t\neq -\frac{b}{a}$，且特徵方程(2)有兩個相異根 r_1,r_2，則遞迴方程(1)的解為

$$f(n)=\frac{(t-r_1)r_2(ar_2+b)^{n-1}-(t-r_2)r_1(ar_1+b)^{n-1}}{(t-r_1)(ar_2+b)^{n-1}-(t-r_2)(ar_1+b)^{n-1}} \tag{3}$$

(II)若 $f(1)=t$，且特徵方程式(2)有重根 r_0，則遞迴方程式(1)的解為

$$f(n)=r_0+\frac{(ar_0+b)(t-r_0)}{(ar_0+b)+a(t-r_0)(n-1)} \tag{4}$$

【證明】：(I)因為 $ar^2+(b-c)r-d=0$ 有相異根 r_1,r_2

$$\therefore \begin{cases} r_1+r_2=\frac{-(b-c)}{a} \quad 或 \quad r_1+r_2+\frac{b}{a}=\frac{c}{a} \\ r_1r_2=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

由方程式(1)可得

$$f(n+1)=\frac{\frac{c}{a}f(n)+\frac{d}{a}}{f(n)+\frac{b}{a}}=\frac{(r_1+r_2+\frac{b}{a})f(n)-r_1r_2}{f(n)+\frac{b}{a}}$$

$$=r_1+\frac{r_2f(n)-r_1\frac{b}{a}+\frac{b}{a}f(n)-r_1r_2}{f(n)+\frac{b}{a}}$$

$$=r_1+\frac{(ar_2+b)(f(n)-r_1)}{af(n)+b}$$

$$\text{i.e.,}\quad f(n+1)-r_1=\frac{(ar_2+b)(f(n)-r_1)}{af(n)+b} \tag{a}$$

同理亦可得

$$f(n+1)-r_2=\frac{(ar_1+b)(f(n)-r_2)}{af(n)+b} \tag{b}$$

$(a)\div(b)$：

$$\frac{f(n+1)-r_1}{f(n+1)-r_2}=(\frac{ar_2+b}{ar_1+b})(\frac{f(n)-r_1}{f(n)-r_2})$$

由此可知$\frac{f(n)-r_1}{f(n)-r_2}$是以$(\frac{ar_2+b}{ar_1+b})$為公比，以

$\frac{f(1)-r_1}{f(1)-r_2}=\frac{t-r_1}{t-r_2}$為首項之等比數列的第$n$項

$\therefore \frac{f(n)-r_1}{f(n)-r_2}=(\frac{t-r_1}{t-r_2})(\frac{ar_2+b}{ar_1+b})^{n-1}$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{(t-r_1)r_2(ar_2+b)^{n-1}-(t-r_2)r_1(ar_1+b)^{n-1}}{(t-r_1)(ar_2+b)^{n-1}-(t-r_2)(ar_1+b)^{n-1}}$$

(Ⅱ)若r_0是$ar^2+(b-c)r-d=0$之重根，則

$$\begin{cases}2r_0+\frac{b}{a}=\frac{c}{a}\\ r_0^2=-\frac{d}{a}\end{cases}$$

由方程式(1)可得

$$f(n+1)-r_0=\frac{\frac{c}{a}f(n)+\frac{d}{a}}{f(n)+\frac{b}{a}}-r_0=\frac{(2r_0+\frac{b}{a})f(n)-r_0^2}{f(n)+\frac{b}{a}}-r_0$$

$$=\frac{(ar_0+b)(f(n)-r_0)}{af(n)+b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(n+1)-r_0}=\frac{af(n)+b}{(ar_0+b)(f(n)-r_0)}$$

$$=\frac{(ar_0+b)+[af(n)-ar_0]}{(ar_0+b)(f(n)-r_0)}$$

$$=\frac{1}{f(n)-r_0}+\frac{a}{ar_0+b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(n+1)-r_0}-\frac{1}{f(n)-r_0}=\frac{a}{ar_0+b}$$

由此可知$\frac{1}{f(n)-r_0}$是以$\frac{a}{ar_0+b}$為公差，

以$\frac{1}{f(1)-r_0}=\frac{1}{t-r_0}$為首項的等差數列之第$n$項，所以

$$\frac{1}{f(n)-r_0}=\frac{1}{t-r_0}+(n-1)\frac{a}{ar_0+b}=\frac{(ar_0+b)+a(t-r_0)(n-1)}{(ar_0+b)(t-r_0)}$$

$$\Rightarrow f(n)=r_0+\frac{(ar_0+b)(t-r_0)}{(ar_0+b)+a(t-r_0)(n-1)}$$

Example 10：設 $f(1)=2$ 且 $f(n+1)=\dfrac{f(n)+2}{2f(n)+1}$ (5)

求 $f(n)=?$

【解】：方程式(5)的特徵方程式為

$2r^2+(1-1)r-2.=0$ (即 $r^2-1=0$)

有兩個相異根 $r_1=1$ 及 $r_2=-1$

我們按照定理 1 的證明方式，來求解如下：

因為 $f(n+1)-1=\dfrac{-[f(n)-1]}{2f(n)+1}$

及 $f(n+1)-(-1)=\dfrac{(2+1)[f(n)-(-1)]}{2f(n)+1}=\dfrac{3(f(n)+1)}{2f(n)+1}$

可得

$\dfrac{f(n+1)-1}{f(n+1)+1}=(-\dfrac{1}{3})(\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1})\Rightarrow\left\{\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}\right\}$ 是以 $\dfrac{f(1)-1}{f(1)+1}$ 為首項，

$(-\dfrac{1}{3})$ 為公比之等比數列的第 n 項

$\Rightarrow\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}=(\dfrac{f(1)-1}{f(1)+1})(-\dfrac{1}{3})^{n-1}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}$

$\Rightarrow f(n)=\dfrac{3^n-(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$

Example 11：設 $f(1)=1$，且 $f(n+1)=\dfrac{1+\sqrt{3}f(n)}{\sqrt{3}-f(n)}$ (6)

求 $f(n)=?$

【解】：方程式(6)的特徵方程式為

$r=\dfrac{1+\sqrt{3}r}{\sqrt{3}-r}$ 或 $r^2+1=0$

$\Rightarrow r_1=-i, r_2=i$

將 $f(1)=t=1$ 代入(3)式可得

$$f(n)=\frac{(1+i)i(-i+\sqrt{3})^{n-1}+(1-i)i(i+\sqrt{3})^{n-1}}{(1+i)(-i+\sqrt{3})^{n-1}-(1-i)(i+\sqrt{3})^{n-1}}$$

因為 $-i+\sqrt{3}=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$，$i+\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi i}{6}}$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{2^{n-1}\left[(1+i)ie^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}+(1-i)ie^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}\right]}{2^{n-1}\left[(1+i)e^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}-(1-i)e^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}\right]}$$

$$=\frac{ie^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}+e^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}}{e^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}+ie^{\frac{(n-1)\pi}{6}i}}\text{(分子分母同除}(1+i)\text{)}$$

$$=\frac{i\left[\cos\frac{n-1}{6}\pi-i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right]+\left[\cos\frac{n-1}{6}\pi+i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right]}{\left[\cos\frac{n-1}{6}\pi-i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right]+i\left[\cos\frac{n-1}{6}\pi-i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right]}$$

$$=\frac{(1+i)\left[\cos\frac{n-1}{6}\pi+\sin\frac{n-1}{6}\pi\right]}{(1+i)\left[\cos\frac{n-1}{6}\pi-\sin\frac{n-1}{6}\pi\right]}$$

$$=\frac{\cos\frac{n-1}{6}\pi+\sin\frac{n-1}{6}\pi}{\cos\frac{n-1}{6}\pi-\sin\frac{n-1}{6}\pi}\text{。}$$

Example 12：設 $f(1)=1$ 且 $f(n+1)=\frac{2f(n)-9}{f(n)-4}$ (7)

求 $f(n)=?$

【解】：方程式(7)的特徵方程式為

$r^2+(-4-2)r-(-9)=0$ 或 $r^2-6r+9=0$

$\Rightarrow$ 有兩個重根 $r_0=3$

$$f(n+1)-3=\frac{2f(n)-9}{f(n)-4}-3=\frac{-(f(n)-3)}{f(n)-4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{f(n+1)-3}=-\frac{f(n)-4}{f(n)-3}=-1+\frac{1}{f(n)-3}$$

$\Rightarrow\left\{\frac{1}{f(n)-3}\right\}$ 是以 -1 為公差，$\frac{1}{f(1)-3}=-\frac{1}{2}$ 為首項之等差數列的第 n 項

$$\therefore\frac{1}{f(n)-3}=-\frac{1}{2}+(-1)(n-1)=\frac{1-2n}{2}$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{6n-5}{2n-1}$$

【註】：1.我們注意到，並不是對於任意給定的初始條件，都能解出分式線性遞迴方程式(1)的解。當 $f(1)=-\frac{b}{a}$ 時，方程式(1)的解即不存在。

2.當初始條件 $f(1)=r$ 是特徵方程式(2)的根之時，方程式(1)的解，就是常數 $f(n)\equiv r_0$(代入(3)，(4)即可得)

3.方程式(1)的解也可能只是週期性的取某幾個數值。(參見下例)

Example：設 $f(1)=t$，根據 t 的取值的不同，求分式線性遞迴方程式

$$f(n+1)=\frac{3f(n)+1}{5f(n-1)-3}. \tag{8}$$

的解。

【解】：因為方程式(8)的特徵方程式為

$$r=\frac{3r+1}{5r-3} \qquad \text{i.e.,} 5r^2-6r-1=0$$

有兩個相異根 $r_1=\frac{3+\sqrt{14}}{5}$ 及 $r_2=\frac{3-\sqrt{14}}{5}$

將此代入(3)式可得。(Note $a=5,b=-3,f(1)=t$)

$$f(n)=\frac{(t-\frac{3+\sqrt{14}}{5})(\frac{3-\sqrt{14}}{5})(\sqrt{14})^{n-1}-(t-\frac{3-\sqrt{14}}{5})(\frac{3+\sqrt{14}}{5})(\sqrt{14})^{n-1}(-1)^{n-1}}{(t-\frac{3+\sqrt{14}}{5})(\sqrt{14})^{n-1}-(t-\frac{3-\sqrt{14}}{5})(\sqrt{14})^{n-1}(-1)^{n-1}}$$

$$=\frac{(t-\frac{3+\sqrt{14}}{5})(\frac{3-\sqrt{14}}{5})-(t-\frac{3-\sqrt{14}}{5})(\frac{3+\sqrt{14}}{5})(-1)^{n-1}}{(t-\frac{3+\sqrt{14}}{5})-(t-\frac{3-\sqrt{14}}{5})(-1)^{n-1}}$$

因此，$f(n)$ 可分成 4 種情形：

1. 當 $t=\frac{3+\sqrt{14}}{5}$ 時，$f(n)\equiv\frac{3+\sqrt{14}}{5}$

2. 當 $t=\frac{3-\sqrt{14}}{5}$ 時，$f(n)\equiv\frac{3-\sqrt{14}}{5}$

3. 當 $t=\frac{3}{5}$ 時，若 n 取奇數，則分母為 0，所以沒有解

4. 當 $t\neq\frac{3}{5}$ 且 $t\neq\frac{3\pm\sqrt{14}}{5}$ 時，則

$$f(n)=\begin{cases} t & \text{如果}n\text{為奇數,} \\ \frac{3t+1}{5t-3} & \text{如果}n\text{為偶數.} \end{cases}$$