伍、筆試試題及參考解答

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（一）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2小時(13：30～15:30)

(2) 配分：每題35分

(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上

(4) 不可使用電算器

(5) 試題與答案卷一同繳回

【問題一】：已知正實數 a, b, c 滿足 $abc = 1$，試證：$1 + \dfrac{3}{a+b+c} \geq \dfrac{6}{ab+bc+ca}$

【問題二】：某命題單位要出10份數學考卷，每份考卷要有4道題目，且任意兩份考卷之中至多只有一道題目相同。試求此命題單位至少要準備多少道題目？

【問題三】：設 $\overline{AB}$ 為橢圓的長軸，O 為其中心，F 為其一焦點。P 為橢圓上的一點，$\overline{CD}$ 為通過 O 的一條弦；若 $\overleftrightarrow{CD}$ 平行於過 P 點的切線，且 $\overleftrightarrow{PF}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 Q 點，試確定 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{OA}$ 之大小關係。

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試 （一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

令 $x=1/a$ ，$y=1/b$ ，$z=1/c$ ，$\therefore xyz=1$

原不等式變成需證明：$1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\geq\dfrac{6}{x+y+z}$

$\because\ (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$,

$\therefore\ 1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\geq 1+\dfrac{9}{(x+y+z)^2}\geq\dfrac{6}{x+y+z}$

[問題二] 參考解答：

該命題單位至少要準備 13 道題。假設此結論不對，則此命題單位可以只準備 12 道題。考慮這 12 道題中固定的 1 題，稱作題目 A。假設題目 A 在某份試卷中，則此試卷中其他 3 題必須與此題不同(事實上，每份試卷中必須 4 題互異)。剩下的 11 題至多只可以分成 3 組彼此相異的 3 道題，所以題目 A 至多只能在 3 份試卷中。因為題目 A 是 12 道題中任意的一題，所以十份考卷總共至多有 $12\times 3=36$ 道題(相同的題目已重複計算)。但是每份試卷要有 4 道題，36 道題最多只能組成 9 份試卷，矛盾！所以至少要準備 13 道題。

下列顯示 13 道題目確實可以組成 10 份符合規定的試卷：(1, 2, 3, 4), (1, 5, 6, 7), (1, 8, 9, 10), (1, 11, 12, 13), (2, 5, 8, 11), (3, 6, 9, 12), (4, 7, 10, 13), (2, 6, 10, 11), (3, 7, 8, 11), (4, 5, 9, 13)。

注意：10 份試卷題目的組合方式並不是唯一的。

[問題三] 參考解答：

設F'為另一焦點，連$\overleftrightarrow{PF'}$交$\overleftrightarrow{CD}$於Q'。

另過F'作平行$\overleftrightarrow{CD}$的直線交$\overleftrightarrow{PQ}$於R

由橢圓的光學性質及$\overleftrightarrow{CD}$平行切線$\overleftrightarrow{PT}$可知

$\angle PQ'Q = \angle PQQ'$，$\angle PF'R = \angle PRF'$

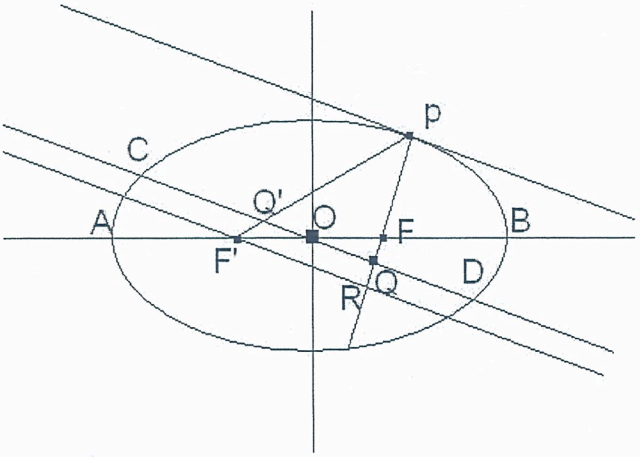
於是 $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$，$\overline{QR} = \overline{Q'F'}$

另由O是$\overline{FF'}$的中點，$\overline{OQ} // \overline{F'R}$，故得$\overline{FQ} = \overline{QR} = \overline{Q'F'}$

從而 $2\overline{PQ} = \overline{PQ} + \overline{PQ'} = \overline{PF} + \overline{FQ} + \overline{PQ'}$

$= \overline{PF} + \overline{PQ'} + \overline{Q'F'} = \overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{AB}$

故 $\overline{PQ} = \overline{OA}$



94 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（二）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時(16：00 ~ 18:00)。

(2) 配分：每題 35 分。

(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 不可使用電算器。

(5) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：設 P, Q 為圓 O 上的兩個定點，M 為圓 O 內部異於 O 的任意一點。試證：若 M, P, Q, O 四點共圓，則 $\angle PMQ$ 的角平分線與直線 OM 互相垂直。

【問題二】：設 x, y, z, a, b, c 都是正整數，且滿足：

(1) xy 除以 z 之餘數為 a，

(2) yz 除以 x 之餘數為 b，

(3) zx 除以 y 之餘數為 c。

試證：$\min\{x, y, z\} \le ab + bc + ca$

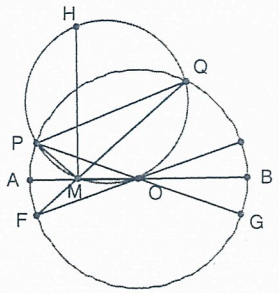
【問題三】：設 a_1，a_2，…，a_{95} 都是正數。試證：$\sum_{k=1}^{95} a_k \le 94 + \prod_{k=1}^{95} \max\{1, a_k\}$

（式中符號 $\prod$ 表示為 $\prod_{i=1}^{n} b_i = b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n$ ）

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試 （二）【參考解答】

[問題一] 參考解答：



設線段 $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑（包含 O, M ），本題只要證明 $\angle PMA = \angle QMB$ 。

延長線段 $\overline{PO}$ 與 $\overline{QM}$ 分別與圓 O 交於點 G 與點 F。因 M, P, Q, O 四點共圓，$\angle OPQ = \angle OMQ$ 。又

$$\angle OPQ = \frac{1}{2}\widehat{QG} = \frac{1}{2}\widehat{QB} + \frac{1}{2}\widehat{BG},$$

$\angle OMQ = \frac{1}{2}(\widehat{QB} + \widehat{AF})$ ，故 $\widehat{BG} = \widehat{AF}$ 。因 $\widehat{PA} = \widehat{BG}$ ，得 $\widehat{PA} = \widehat{AF}$ ，故 $\angle PMA = \angle FMA$。對頂角 $\angle FMA = \angle QMB$ ，從而得 $\angle PMA = \angle QMB$ 。

[問題二] 參考解答：

由已知條件可知 $xy = kz + a,\ \ yz = lx + b,\ \ zx = my + c$ 。

不失其一般性，可設 $x \le y \le z$ ，則 $ky < kz = xy - a < xy$ ，

故 $k \le x$ 。又因

$$0 \equiv k(zx - c) \equiv (kz)x - kc \equiv (xy - a)x - kc \equiv -(ax + kc) \pmod{y}$$

可得， $y \mid ax + kc$ 。可令 $ax + kc = ty$ 。於是可得，

$(a + c)x \ge ax + kc = ty \ge tx$ 。

因此，$t \le a + c$ 。 同樣的，

$$0 \equiv t(yz - b) \equiv (ty)z - tb \equiv (ax + kc)z - tb \equiv kcz - tb$$

$$\equiv c(xy - a) - tb \equiv -(ac + tb) \pmod{x}$$

因此， $x \mid ac + tb$ 。於是，

$x \le ac + tb \le ac + (a + c)b = ab + bc + ca$

[問題三] 參考解答：

若每一項 $a_k \le 1$，則不等式顯然成立。故不失其一般性可設 $a_k > 1$ ，$\forall k = 1,2,\ldots,s$ ，

而 $a_k \le 1$ ， $\forall k = s+1, s+2, \cdots, n$ 。於是，

$$\prod_{k=1}^{95} \max\{1, a_k\} = \prod_{k=1}^{s} a_k = \prod_{k=1}^{s} (1 + (a_k - 1)) \ge (1 + \sum_{k=1}^{s} (a_k - 1)) = 1 + \sum_{k=1}^{s} a_k - s$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{95} a_k - \sum_{k=s+1}^{95} a_k - s \ge 1 + \sum_{k=1}^{95} a_k - (95 - s) - s = (1 - 95) + \sum_{k=1}^{95} a_k$$

因此 $\sum_{k=1}^{95} a_k \le 94 + \prod_{k=1}^{95} \max\{1, a_k\}$

陸、口試試題及參考解答

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試試題

【問題一】：設A表示前$2k+1$個連續正奇數的乘積，B表示前$2k+1$個連續正偶數的乘積。
試證：$A+B$可被$4k+3$整除。

【問題二】：設D為ΔABC中AB邊的中點，E，F分別為AC邊和BC邊上的任意點。
試證：　$a\Delta DEF < a\Delta ADE + a\Delta BDF$

94 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試　【參考解答】

[問題一] 參考解答：

$$A = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(4k-1)\times(4k+1)$$

$$B = 2\times 4\times 6\times\cdots\times(4k)\times(4k+2)$$

$$A+B = 1\times 3\times\cdots\times(4k-1)(4k+1)+[(4k+3)-(4k+1)]\times[(4k+3)-(4k-1)]$$
$$\times\cdots\times[(4k+3)-3]\times[(4k+3)-1]$$
$$= 1\times 3\times\cdots\times(4k-1)\times(4k+1)+(4k+3)\text{ 的倍數}$$
$$+(-(4k+1))(-(4k-1))\times\cdots\times(-3)\times(-1)$$
$$= 1\times 3\times\cdots\times(4k-1)\times(4k+1)+(4k+3)\text{ 的倍數}$$
$$+(-1)^{2k+1}1\times 3\times\cdots\times(4k-1)(4k+1)$$
$$= (4k+3)\text{ 的倍數}$$

[問題二] 參考解答：

延長 DE 至 G，使 $DG = DE$

連結 GB，GF

則 $\Delta BDG \cong \Delta ADE$

而有　$a\Delta BDG = a\Delta DEF$

由於 $BGDF$ 為凸四邊行

$a\triangle ADE + a\triangle BDF = a\ \ BGEF > a\triangle DGF = a\triangle DEF$

教育部94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

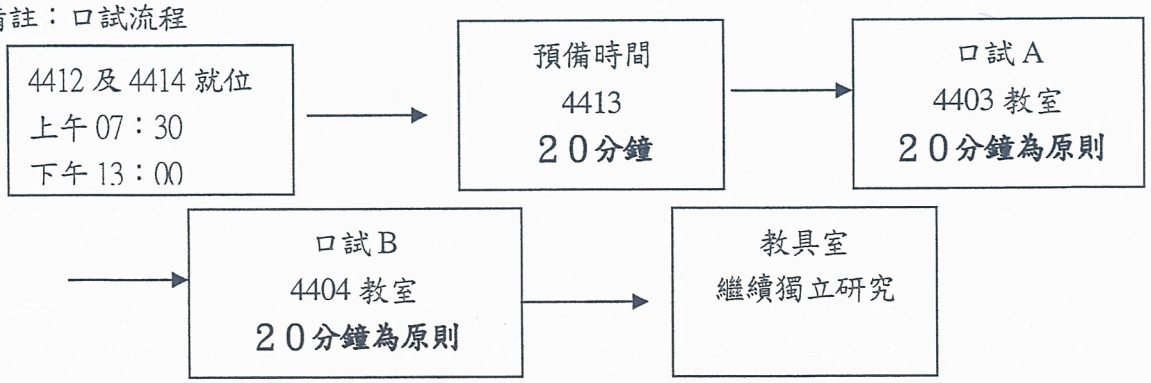
口試程序表

考生順序	（編號）	預備時間	口試A 4403教室	口試B 4404教室
1	94052	07：40	08：00	08：20
2	94015	08：00	08：20	08：40
3	94022	08：20	08：40	09：00
4	94041	08：40	09：00	09：20
5	94001	09：00	09：20	09：40
6	94008	09：20	09：40	10：00
7	94013	10：00	10：20	10：40
8	94011	10：20	10：40	11：00
9	94025	10：40	11：00	11：20
10	94043	11：00	11：20	11：40
11	94053	11：20	11：40	12：00

午　　餐

考生順序	（編號）	預備時間	口試A 4404教室	口試B 4403教室
12	94003	13：10	13：30	13：50
13	94009	13：30	13：50	14：10
14	94019	13：50	14：10	14：30
15	94004	14：10	14：30	14：50
16	94037	14：30	14：50	15：10
17	94045	14：50	15：10	15：30
18	94055	15：30	15：50	16：10
19	94016	15：50	16：10	16：30
20	94020	16：10	16：30	16：50
21	94012	16：30	16：50	17：10
22	94039	16：50	17：10	17：30

備註：口試流程



柒、獨立研究試題及參考解答

94 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時。

(2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(3) 不可使用電算器。

(4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：試求方程式 $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ 的所有整數解 (x,y)。

【問題二】：給定線段 $\overline{AB}=7$，C 為 $\overline{AB}$ 的一點，使得 $\overline{AC}=5$，分別以 $\overline{AC}$ 及 $\overline{CB}$ 為邊，在 $\overline{AB}$ 的同側作正三角形，設它們外接圓的圓心分別為 O 及 O'。

試求：$\overline{OO'}$ 之長。

【問題三】：設 $f(x)=x^3-6x^2+17x$，若 $f(a)=16, f(b)=20$，求 $a+b$。

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

$\because x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}[(x+y)^2+3(x-y)^2]$. 若令$p=x+y$, $q=x-y$, 則

原方程式可化為$28p=3(p^2+3q^2)$. 由此可知$p>0$且p是3的倍數.

設$p=3k$, 其中$k\in N$, 則$28k=3(3k^2+q^2)$. 於是又可得$k>0$且k是3的倍數. 設$k=3m$, $m\in N$, 則$28m=27m^2+q^2$, 因此$28m-27m^2=q^2\geq 0$.

由此可知$m=1$. 所以此時$k=3$, $p=9$, $q=\pm 1$. 故可由方程組

$\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=\pm 1 \end{cases}$ 得到原方程式的解$(x,y)=(5,4)$或$(4,5)$

[問題二]參考解答：

如圖所示, 連接$\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{O'C}$, 在$\Delta OCO'$中, $\angle OCO'=120°$. 所以

$6\overline{OO'}^2=6(\overline{CO}^2+\overline{CO'}^2-2\overline{CO}\cdot\overline{CO'}\cos 120°)=6(\overline{CO}^2+\overline{CO'}^2+\overline{CO}\cdot\overline{CO'})$

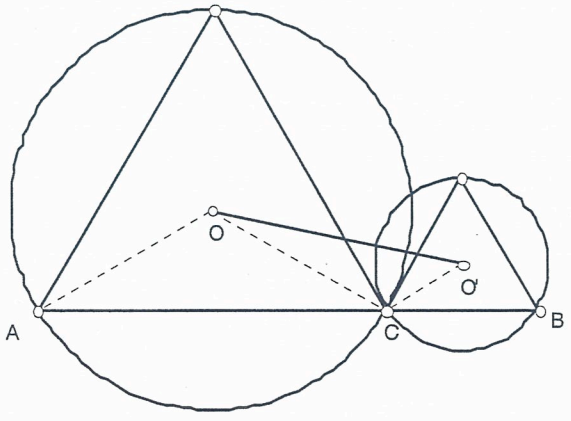
因$\overline{CO}=\frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}}$, $\overline{CO'}=\frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}$, 所以$6\overline{CO}^2=2\overline{AC}^2$, $6\overline{CO'}^2=2\overline{BC}^2$

因而, $6\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO'}=2\overline{AC}\cdot\overline{BC}=(\overline{AC}+\overline{BC})^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$.

由此可得

$6\overline{OO'}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{BC}^2+(\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

所以$6\overline{OO'}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=49+25+4=78$. 故, $\overline{OO'}=\sqrt{13}$



[問題三] 參考解答：

$$f(a)+f(b)=a^3-6a^2+17a+b^3-6b^2+17b$$

$$=(a^3+b^3)-6(a^2+b^2)+17(a+b)$$

$$=[(a+b)^3-3(a+b)ab]-6[(a+b)^2-2ab]+17(a+b)$$

$$=[(a+b)^3-6(a+b)^2+17(a+b)]-3ab[(a+b)-4]$$

故 $[(a+b)^3-6(a+b)^2+17(a+b)-36]-3ab[(a+b)-4]=0$

$\Rightarrow$ $[(a+b)-4][(a+b)^2-2(a+b)+9-3ab]=0$

因 $(a+b)^2-2(a+b)+9-3ab=a^2+b^2-ab-2(a+b)+9$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2+10]>0$$

得 $a+b=4$.

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）試題

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時。

(2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(3) 不可使用電算器。

(4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：94 個保險箱，94 把鑰匙。每把鑰匙恰好能開一個保險箱，每個保險箱也只有一把鑰匙能開。現在主人隨機地在每個保險箱裡面放一把鑰匙，把其中的 92 個保險箱鎖上，而保留兩個保險箱開著(這個動作也是隨機的)，試求用這二個保險箱的鑰匙，能打開其餘的 92 個保險箱的機率是多少？

（ 附註：保險箱一旦被打開，鎖在裡面的鑰匙就可用來試著打開其他的保險箱）

【問題二】：假定 $0 \le x \le 5$，試求滿足 $[x^2 - 2x] = [x]^2 - 2[x]$ 的一切實數 x，其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

【問題三】：若正整數 p, q, r 使得二次方程式 $px^2 - qx + r = 0$ 在開區間 $(0,1)$ 內有兩個不同的實根，試求 p 的最小值。

94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）試題【參考解答】

[問題一] 參考解答：

證明：n個保險箱有k個開著的時候，其餘$n-k$個保險箱都能打開的機率為$\frac{k}{n}$.

底下由數學歸納法證明：

(1) 當n＝k時結論顯然成立.

(2) 假設結論在$n \geq k$時成立. 則在$n+1$個保險箱的情況下，不妨假設前k個開著的箱子在前n個保險箱中，那麼第$n+1$個箱子能用鑰匙打開的充要條件為第m個$(m \leq n)$箱子開著時，第$n+1$個箱子可用其內的鑰匙打開，因此第$n+1$個箱子的第$n+1$把鑰匙不在這個箱子中，設它在第m個箱子中而將第$n+1$個箱子及其內鑰匙去掉，仍符合歸納假設，

前k個打開的鑰匙，可打開其餘箱子的機率為$\frac{k}{n}$，而把第$n+1$把鑰匙

放在前n個保險箱的機率為$\frac{n}{n+1}$；因此，對$n+1$個箱子而言，所求的機率

為$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k}{n+1}$. 於是結論對一切自然數$n$都成立.

[問題二] 參考解答：

設$[x]=n$, $x-[x]=y$. 則$n \in Z$, $y \in [0,1)$. 原方程式化為

$[(n+y)^2-2(n+y)]=n^2-2n$，則 $[y^2+2(n-1)y]=0$，所以

$$0 \leq y^2+2(n-1)y<1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

當$n \leq 0$，即n為非正的整數時 ，只有 $y=0$滿足 (1)式 .

當$n \geq 1$，關於 y的不等式 (1)的解區間為

$$[\ 0\ ,\ \sqrt{(n-1)^2+1}-n+1\ ).$$

綜上所述 ，滿足方程的實數 x的解是

非正的整數及 $x \in [\ n\ ,\ \sqrt{(n-1)^2+1}-n+1\ )\ (n=1,2,3,4).$

[問題三] 參考解答：

設 $f(x)=px^2-qx+r=p(x-x_1)(x-x_2)$ ，其中$0<x_1<1$ ，$0<x_2<1$ ，$x_1 \neq x_2$.

$\because$ $\quad x_1(1-x_1) \leq [\frac{x_1+(1-x_1)}{2}]^2=\frac{1}{4}$ $\quad$ 且 $\quad x_2(1-x_2) \leq \frac{1}{4}$,

上述兩不等式等號成立 的條件是 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$，這與 $x_1 \neq x_2$ 相違.

$\therefore$ $\quad 0<f(0)f(1)=p^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)<\frac{p^2}{16}$.

又 p,q,r為正整數 ，$\therefore$ $f(0), f(1)$均為整數 ，故 $f(0)f(1) \geq 1$，從而 得

$p^2>16$, $p \geq 5$. 另一方面 ，$5x^2-5x+1=0$在$(0,1)$ 內確有兩個不同的實根 .

所以 p的最小值為 5.

捌、94學年度各分區複賽試題及參考解答

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第一區(花蓮區)　筆試(一)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，第一題十二分，第二題十二分，第三題十三分，第四題十二分，滿分四十九分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

一、 設正方形 $ABCD$ 的邊長為1，在邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AD}$ 上分別取一點 E，F 使得 $\triangle AEF$ 的周長為2，試求 $\angle ECF$。(十二分)

二、 已知直角三角形 ABC 的直角頂為 $A(1,2)$，另兩點 B、C 在拋物線 $y^2=4x$ 上，試證：直線 BC 會通過一定點，並求出此定點坐標。(十二分)

三、 宇富小朋友的存錢計畫：母親在每年年初時從宇富的壓歲錢裡拿出100元存起來，父親則在年底時檢查宇富的存款，並存入相同的金額(存款加倍的意思)。此存款計畫從今年年初開始，並令 a_n 是第 n 年年中時，宇富的存款總數。

(1)寫下 a_n 與 a_{n+1} 的關係。(三分)

(2)求 a_n 的一般項公式。(四分)

(3)第幾年之後，宇富小朋友的存款會超過一百萬元。(六分)

四、 設二次方程式 $x^2+bx+c=0$ 滿足 $b^3-3cb+c(c+1)=0$。證明：該二次方程式的一根為另一根的平方。(十二分)

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第一區(花蓮區)　筆試(一)【參考解答】

筆試一：計算證明題

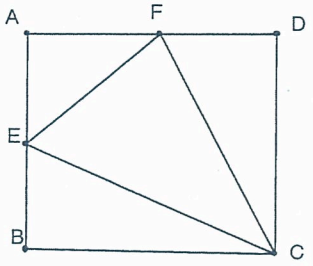
一、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，在邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 上分別取一點 E，F 使得△AEF 的周長為 2，試求∠ECF。

【解】設∠ECB＝α，∠DCF＝β，則 $\tan\alpha$=BE，$\tan\beta$=DF

$$EF = 2 - AE - AF = 2 - (1 - BE) - (1 - DF) = BE + DF = \tan\alpha + \tan\beta$$

由 $AE^2 + AF^2 = EF^2 \Rightarrow (1-\tan\alpha)^2 + (1-\tan\beta)^2 = (\tan\alpha + \tan\beta)^2$

解之得 $\tan(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \pi/4$



二、已知直角三角形 ABC 的直角頂為 $A(1,2)$，另兩點 B、C 在拋物線上 $y^2 = 4x$ 上，則直線 BC 會通過一定點，並求出此頂點坐標。

【解】設 $B(s^2, 2s)$，　$C(t^2, 2t)$ 則 BC 之直線方程式為 $2x - (s+t)y + 2st = 0$

∵∠BAC 為直角

$$\therefore m_{AB} \times m_{AC} = \frac{2s-2}{s^2-1} \times \frac{2t-2}{t^2-1} = \frac{4}{(s+1)(t+1)} = -1$$，故 $(s+1)(t+1) = 4$

∵ $s + t = a - 5 - st$ ∴ BC 之直線方程式為

$$2x - (s+t)y + 2st = 2x + (5+st)y + 2st = (2x+5y) + st(y+2) = 0$$

故直線 BC 通過定點 $2x + 5y = 0$，$y + 2 = 0$，即 $(5, -2)$

三、宇富小朋友的存錢計畫：母親在每年年初時從宇富的壓歲錢裡拿出 100 元存起來，父親則在年底時檢查宇富的存款，並存入相同的金額(存款加倍的意思)。此存款計畫從今年年初開始，並令a_n是第n年年中時，宇富的存款總數。

(1)寫下a_n與 a_{n+1}的關係。

(2)求a_n的一般項公式。

(3)第幾年之後，宇富小朋友的存款會超過一百萬元。

【解】(1)第 $n+1$ 年年中的錢數等於第 n 年錢數的兩倍，再加過年每親存的 100 元，

即 a_{n+1} 與 a_n 有如下的遞迴關係：$a_{n+1}=2a_n+100$

(2)將遞迴關係$a_{n+1}=2a_n+100$改寫成$(a_{n+1}+100)=2(a_n+100)$

也就是說，$\langle a_n+100\rangle$是首項$a_1+100=100+100=200$，公比 2 的等比數列。

由等比數列的一般項公式，得

$$a_n+100=(a_1+100)\cdot 2^{n-1}=200\cdot 2^{n-1}=100\cdot 2^n \Rightarrow a_n=10(2^n-1)$$

(3)設第n年之後，宇富的存款會超過一百萬元，也就是說$a_n\geq 10^6$，即

$$a_n=100(2^n-1)\geq 10^6 \Rightarrow 2^n>10000$$

解得$n\geq 14$。故第 14 年之後，宇富的存款會超過一百萬元。

四、設二次方程式$x^2+bx+c=0$滿足$b^3-3cb+c(c+1)=0$。

證明：該二次方程式的一根為另一根的平方。

【解】(a)由根與係數關係知道$\alpha+\beta=-b,\alpha\beta=c$，將它代入得到

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta^2)(\beta-\alpha^2)&=\alpha\beta+(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\&=c+c^2+b((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)=c+c^2+b(b^2-3c)\\&=b^3-3cb+c(c+1)\end{aligned}$$

(b)因為$b^3-3cb+c(c+1)=0$，所以由(a)知道

$$(\alpha-\beta^2)(\beta-\alpha^2)=0\Rightarrow \alpha=\beta^2 \text{ 或 } \beta=\alpha^2$$

無論是哪一種情形，該二次方程式的一根為另一根的平方。

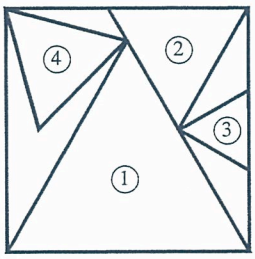
94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第一區(花蓮區)　筆試(二)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，每題3.5分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1、在邊長為1的正方形內畫編號①、②、③、④四個正三角形，如下圖所示：



已知編號②的正三角形的邊長為a；編號③的正三角形的邊長為b，求數對(a,b) =____(一)____。

2、已知數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=1$及$a_{2n}=2a_n-1$，$a_{2n+1}=2a_n+1$，求a_{59}=____(二)____。

3、已知正整數n不超過2005，且能表示成不少於60個連續正整數的和，那麼這樣的正整數n有____(三)____個。

4、若平面上某圓通過$A(0,2),B(2,4)$兩點，且與x軸相切，則此圓的半徑可為____(四)____。

5、已知一項過關遊戲規則為：在第n關要擲一顆骰子n次，所出現的點數和大於2^n，才算過關。那麼某人連過前兩關的機率為____(五)____。

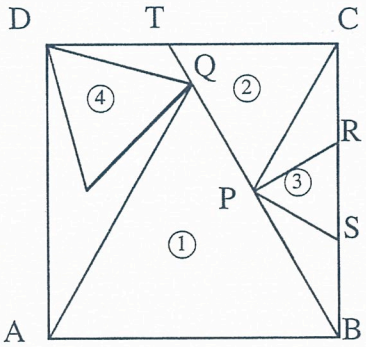
6、在圓周上，取n個相異點，任兩點作連線，這些線段最多可以將圓內部分割成$P(n)$塊區域。數學家知道$P(n)$是n的四次多項式函數。請問$P(7)$的值為____(六)____

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第一區(花蓮區)　筆試(二)【參考解答】

筆試二：填充題

1、標記號如下圖所示：編號 ① 的正三角形的邊長 $\overline{AB}$ 恰是正方形的邊長，因此編號 ① 的正三角形的邊長為 1。編號 ② 的正三角形的邊長為 $\overline{TC}$ ，又三角形 BTC 為直角三角形且 $\angle TBC=30^0$ ， $\overline{BC}=1$ 。因此 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^0=\frac{\overline{TC}}{\overline{BC}}=\overline{TC}$

即編號 ② 的正三角形的邊長為 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



因為 $\angle CRP=120^0,\angle PCR=30^0$ ，所以 $\angle CPR=120^0$ ，即三角形 PRC 為等腰三角形，同理三角形 PSB 也是等腰三角形。因此 $\overline{CR}=\overline{RP}=\overline{PS}=\overline{SB}$ 是編號③的正三角形邊長 $\overline{RS}$ 。所以 $1=\overline{BC}=\overline{CR}+\overline{RS}+\overline{SB}=3\overline{RS}$ ，即編號③的正三角形邊長 $\overline{RS}$ 為 $\frac{1}{3}$ 。

$(a,b)=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3})$

2、$a_{59}=55$

3、設首項為 a，連續 k 個正整數的和為 $n=\frac{(2a+k-1)k}{2}\geq\frac{k(k+1)}{2}$

由 $n\leq 2005$ ，知 $2005\geq\frac{k(k+1)}{2}\Rightarrow 60\leq k\leq 62$

$k=60\Rightarrow n=60a+30\times 59\leq 2005\Rightarrow a=1,2,3\Rightarrow n=1830,1890,1950$

$k=61\Rightarrow n=61a+30\times 61\leq 2005\Rightarrow a=1,2\Rightarrow n=1891,1952$

$k=62\Rightarrow n=62a+31\times 61\leq 2005\Rightarrow a=1\Rightarrow 1953$

ANS：6 個

4、圓心在 AB 的中垂線上，圓心為 $(1-a,3+a)$ ，半徑為

$$\sqrt{(1-a)^2+(1+a)^2}=3+a\Rightarrow 2+2a^2=9+6a+a^2\Rightarrow a=-1\ ,\ 7\Rightarrow r=2,10$$

5、過第一關的機率為 2/3，過第二關的機率為 5/6；

某人連過前兩關的機率為 $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$

6、因為 $P(n)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}+1$ ，所以 $P(7)=57$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第二區　筆試(一)試題

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

（10分）

【問題一】：設n為一正整數，且滿足n^2-735是某整數的四次方，求n的所有可能值為何。

（13分）

【問題二】：給定一個邊長為1的正四面體$ABCD$。設A'為A對於平面BCD的對稱點；

B'為B對於平面ACD的對稱點，M是$\overline{CD}$的中點。試求：

（1）$\Delta A'MB'$的面積；

（2）四面體$A'CB'D$的體積。

（13分）

【問題三】：設一直線L與一雙曲線相交於A,B兩點，並與該雙曲線之漸近線相交於C,D兩點。試證：$\overline{AC}=\overline{BD}$

（13分）

【問題四】：給定實數$a\neq 0$。平面上點$P_n(x_n,y_n)$，$n=0,1,2,3,\cdots$，

滿足$\begin{cases}x_0=1+a\\ y_0=1-a\end{cases}$及$\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+3y_n\\ y_{n+1}=3x_n+2y_n\end{cases}$　$n=0,1,2,3,\cdots$。

試求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\overline{OP_n}$之值。　（$\overline{OP_n}$表示原點到點$P_n$的距離）。

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第二區　筆試(一)【參考解答】

【問題一】：設n為一正整數，且滿足n^2-735是某整數的四次方，求n的所有可能值為何。

【解】：設a為自然數，且$n^2-735=a^4 \Rightarrow (n+a^2)(n-a^2)=735$

將 735 分解成兩正整數之積，得

n^2+a	735	245	147	105	49	35
n^2-a	1	3	5	7	15	21

$\Rightarrow (n,a^2)=(368,367),(124,121),(76,71),(56,49),(32,17),(28,7)$

所以(n,a)的所有可能為 $(124,11),(56,7)$

答：n所有可能為 124 與 56。

【問題二】：給定一個邊長為 1 的正四面體$ABCD$。設A'為A對於平面BCD的對稱點；

B'為B對於平面ACD的對稱點，M是$\overline{CD}$的中點。試求：

（1）$\Delta A'MB'$的面積；（2）四面體$A'CB'D$的體積。（13 分）

【解】：(1) ΔACD為正三角形，所以$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。　設$\frac{1}{2}\angle AMB=\theta$，

則$\sin\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{6}}{3}$。$\angle A'MB'=6\theta$，

$\cos(\frac{1}{2}\angle A'MB')=\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{9}$，$3\theta$為鈍角。

$$\Delta A'MB'=\frac{1}{2}\overline{MA'}\,\overline{MB'}\sin(2\pi-6\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sin 3\theta\cos 3\theta)$$

$$=-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{9}\sqrt{1-\frac{6}{81}}=\frac{5\sqrt{2}}{36}。$$

(2) $\overline{CD}\perp$平面$A'MB'$，所以體積為$\frac{1}{3}\Delta A'MB'\cdot\overline{CD}=\frac{5\sqrt{2}}{108}$。

【問題三】：設一直線L與一雙曲線相交於A,B兩點，並與該雙曲線之漸近線相交於C,D兩點。試證：$\overline{AC}=\overline{BD}$（13 分）

【證明】：設雙曲線為$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，則其漸進線為$b^2x^2-a^2y^2=0$。

設直線L為$y=mx+k$，帶入雙曲線與其漸進線方程式得

$b^2x^2-a^2(ma+k)^2=a^2b^2$ .....(1)

$b^2x^2-a^2(mx+k)^2=0$ .....(2)

由 (1) 得$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2bmx-(a^2k^2+a^2b^2)=0$ .....(3)

由 (2) 得$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2bmx-a^2k^2=0$ .....(4)

(3) 與 (4) 中兩交點之中點的x座標均為$\dfrac{a^2bm}{b^2-a^2m^2}$。故得證。

【問題四】：給定實數$a\neq 0$。平面上點$P_n(x_n,y_n)$，$n=0,1,2,3,\cdots$，

滿足$\begin{cases}x_0=1+a\\ y_0=1-a\end{cases}$及$\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+3y_n\\ y_{n+1}=3x_n+2y_n\end{cases}$ $n=0,1,2,3,\cdots$。

試求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\overline{OP_n}$之值。（$\overline{OP_n}$表示原點到點$P_n$的距離）

【解】：令$f(x,y)=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，則$(x_n,y_n)=f^n(x_0,y_0)$。

$f(1,1)=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$f(1,-1)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。

$\therefore(x_1,y_1)=5(1,-1)+a\cdot(-1)\cdot(1,-1)$，$(x_2,y_2)=5^2(1,-1)+a\cdot(-1)^2\cdot(1,-1)$

$\vdots$

$(x_n,y_n)=5^n(1,-1)+a\cdot(-1)^n\cdot(1,-1)=(5^n+a\cdot(-1)^n,5^n-a\cdot(-1)^n)$

則$\overline{OP}=\sqrt{2\cdot5^{2n}+2\cdot a^2}$。

所以$\dfrac{1}{n}\log\overline{OP_n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2}\log(2\cdot5^{2n}+2a^2)=\dfrac{1}{2n}\left[\log(5^{2n})+\log(2+\dfrac{2a^2}{5^{2n}})\right]$

$=\dfrac{1}{2n}\left[2n\cdot\log5+\log(2+\dfrac{2a^2}{5^{2n}})\right]\to\log5$ as $n\to\infty$。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第二區　筆試(二)試題

編號：_____(學生自填)

注意事項：

本試卷共六題填充題，每題3.5分，滿分21分。
考試時間：1小時。
試題及計算紙必須連同答案卷交回。
將答案填寫在答案欄內。

1. 設a為實數，使得$a+\log_2 3$，$a+\log_4 3$，$a+\log_8 3$形成等比數列，則此等比數列的公比為 ＿＿（一）＿＿。

2. 平面上所有格子點到直線$y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$的距離之最小值為 ＿＿（二）＿＿。

（平面上x坐標與y坐標都是整數的點稱為格子點。）

3. 袋中紅球白球各10個，今重複由袋中任取一球且不放回，直到取出5個紅球為止。則取出的球恰有10個的機率為 ＿＿（三）＿＿。

4. 一單位圓內截去一最大正方形（即邊長為$\sqrt{2}$的正方形）後，剩下四個弓形。從其中一個弓形可截出的最大正方形面積為＿＿（四）＿＿。

5.令$f(m,n)=\sum_{k=1}^{p}\frac{C_k^n}{C_k^m}$，其中$m$、$n$是正整數，$p$是$m$與$n$中比較小的數，

C_k^n為n個相異物中不重複取出k個組合之方法數。則$f(100,102)=$＿＿（五）＿＿。

6.有一遊戲規則如右：在右圖中每一直行、每一橫列及每個小四方格裡，只有1到4的數字，每個數字在每個行列及每個小四方格裡都只出現一次，滿足這些條件的填法稱為一種解法。考慮方格不可旋轉或翻轉，則共有 ＿＿（六）＿＿ 種解法。

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第二區　筆試(二)【參考解答】

編號：_____(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，每題 3.5 分，滿分 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答案欄

(一)	(二)	(三)
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{34}}{85}$	$\frac{C_4^{10}\times C_5^{10}}{C_9^{20}}\times\frac{6}{11}$ 或 $\frac{C_4^{9}\times C_5^{10}}{C_{10}^{20}}$
(四)	(五)	(六)
$\frac{2}{25}$	10200	$\log 5$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第三區（台北市）　筆試(一)試題

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：設a_0為一正整數，而對每個正整數n，令$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}$。試求滿足$\sum_{n=0}^{27}a_n\geq 33$的最小正整數$a_0$。(12分)

問題二：若對所有正實數x，下述不等式恆成立：

$$(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2\geq a\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right),$$

則常數a的最大值為何？(12分)

問題三：設有理係數四次方程式$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$的四個根為r_1、r_2、r_3與r_4。已知r_1+r_2是有理數且$r_1+r_2\neq r_3+r_4$，試證r_1r_2也是有理數。(12分)

問題四：設$ABCD$為一圓內接四邊形。若點E、F與G分別在線段$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與$\overline{AD}$上且$AEFG$為一平行四邊形，如圖所示，試證：$\overline{AC}\times\overline{AF}=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{AG}$。(13分)

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第三區（台北市）　筆試(一)【參考解答】

問題一：設a_0為一正整數，而對每個正整數n，令$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}$。試求滿足$\sum_{n=0}^{27}a_n\geq 33$的最小正整數$a_0$。(12分)

解：依定義，可得

$$a_1=\frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2}\ ,$$

$$a_2=\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{1}{3^2}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})\ ,$$

$$a_3=\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3^2}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}))+\frac{1}{2}=\frac{1}{3^3}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2})\ 。$$

根據數學歸納法，可證得：對每個正整數n，恆有

$$a_n=\frac{1}{3^n}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})\ 。$$

進一步化簡可得

$$a_n=\frac{1}{3^n}a_0+\frac{1}{2}\times\frac{1\cdot(1-1/3^n)}{1-1/3}=\frac{1}{3^n}a_0+\frac{3}{4}\times(1-\frac{1}{3^n})=\frac{1}{3^n}(a_0-\frac{3}{4})+\frac{3}{4}\ 。\qquad (*)$$

請注意：(*)式對每個非負整數n都成立。由此可得

$$\sum_{n=0}^{27}a_n=\sum_{n=0}^{27}\frac{1}{3^n}(a_0-\frac{3}{4})+\sum_{n=0}^{27}\frac{3}{4}=(a_0-\frac{3}{4})\times\frac{1\cdot(1-1/3^{28})}{1-1/3}+\frac{3}{4}\times 28$$

$$=\frac{3}{2}(a_0-\frac{3}{4})\times(1-\frac{1}{3^{28}})+21\ 。$$

因為

$$\sum_{n=0}^{27}a_n\geq 33\ ,$$

所以，得

$$\frac{3}{2}(a_0-\frac{3}{4})\times(1-\frac{1}{3^{28}})+21\geq 33\ ,$$

$$a_0\geq\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times 12\times\frac{3^{28}}{3^{28}-1}=\frac{3}{4}+8\times(1+\frac{1}{3^{28}-1})=\frac{35}{4}+\frac{8}{3^{28}-1}\ 。$$

因為$8/(3^{28}-1)<1/4$，所以，$8<35/4+8/(3^{28}-1)<9$。於是，所求的最小正整數a_0為9。

問題二：若對所有正實數 x，下述不等式恆成立：

$$(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2\geq a\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right),$$

則常數 a 的最大值為何？(12 分)

解：因為 $(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2=(x+\frac{1}{x})^6-(x^3+\frac{1}{x^3})^2$

$$=\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right)\left((x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})\right),$$

而對每個正實數 x，$(x+x^{-1})^3+(x^3+x^{-3})>0$，所以，上述不等式可改寫成

$$(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})\geq a\text{，或}\quad 3(x+\frac{1}{x})\geq a\text{。}$$

因為對每個正實數 x，恆有 $x+x^{-1}\geq 1+1^{-1}=2$，所以，$6\geq a$。亦即：若本題中的不等式 $\left((x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2\right)\geq a\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right)$ 對所有正實數 x 都成立，則常數 a 的最大值為 6。 ||

問題三：設有理係數四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的四個根為 r_1、r_2、r_3 與 r_4。已知 r_1+r_2 是有理數且 $r_1+r_2\neq r_3+r_4$，試證 r_1r_2 也是有理數。(12 分)

證：令 $p=r_1+r_2$、$q=r_3+r_4$、$u=r_1r_2$、$v=r_3r_4$。依根與係數的關係，可得

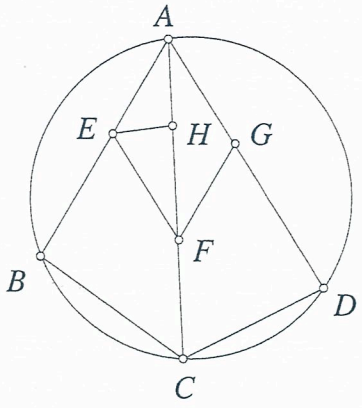
$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3+r_4=-\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=\dfrac{c}{a} \\ r_2r_3r_4+r_1r_3r_4+r_1r_2r_4+r_1r_2r_3=-\dfrac{d}{a} \\ r_1r_2r_3r_4=\dfrac{e}{a} \end{cases}\text{，}\quad\text{或}\quad \begin{cases} p+q=-\dfrac{b}{a} \\ u+pq+v=\dfrac{c}{a} \\ pv+qu=-\dfrac{d}{a} \\ uv=\dfrac{e}{a} \end{cases}\text{。}$$

因為 a、b 與 p 都是有理數，所以，由上述第一式，可知 q 是有理數。將第二式乘以 $-p$ 後與第三式相加，得

$$(-p+q)u-p^2q=\frac{-pc-d}{a}\text{。}$$

因為 a、c、d、p 與 q 都是有理數，所以，由上述等式，可知 $(-p+q)u$ 是有理數。因為 p、q 與 $(-p+q)u$ 都是有理數且 $-p+q\neq 0$，所以，u 是有理數，亦即：r_1r_2 是有理數。 ||

問題四：設 $ABCD$ 為一圓內接四邊形。若點 E、F 與 G 分別在線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 與 $\overline{AD}$ 上且 $AEFG$ 為一平行四邊形，試證：$\overline{AC}\times\overline{AF}=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{AG}$。(13 分)



證 1：設 $\angle ABC\geq\angle ADC$。因為 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，所以，$\angle ABC\geq 90^\circ$。於是，$\overline{AC}\geq\overline{AB}$。設點 H 在 $\overrightarrow{AC}$ 上且 $\overline{AC}\times\overline{AH}=\overline{AB}\times\overline{AE}$，則 $\overline{AH}\leq\overline{AE}\leq\overline{AB}\leq\overline{AC}$，即點 H 在 $\overline{AC}$ 上。因為

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}\ ,\ \angle BAC=\angle HAE\ ,$$

所以，$\triangle ABC\sim\triangle AHE$。於是，$\angle ACB=\angle AEH$。

因為四點 A、B、C、D 共圓，所以，$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD$。因為 $AEFG$ 是平行四邊形，所以，$\angle AEF=180^\circ-\angle BAD$。於是，$\angle BCD=\angle AEF$。進一步由 $\angle ACB<\angle BCD$ 可得 $\angle AEH<\angle AEF$。由此可知：點 H 在 $\overline{AF}$ 上。

因為 $\angle AEF=\angle BCD$ 且 $\angle AEH=\angle ACB$，所以，$\angle FEH=\angle ACD$。因為 $AEFG$ 是平行四邊形，所以，$\angle HFE=\angle DAC$ 且 $\overline{FE}=\overline{AG}$。於是，$\triangle ACD\sim\triangle FEH$，

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{FH}}\ ,$$

$$\overline{AC}\times\overline{FH}=\overline{AD}\times\overline{FE}\ .$$

將兩式相加，即得

$$\overline{AC}\times\overline{AF}=\overline{AC}\times(\overline{AH}+\overline{FH})=\overline{AC}\times\overline{AH}+\overline{AC}\times\overline{FH}$$

$$=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{FE}=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{AG}\ .\ \|$$

證 2：連 $\overline{BC}$。依 Ptolemy 定理，可得 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$。因為 $\triangle AEF\sim\triangle DCB$，所以，$\overline{BD}:\overline{AF}=\overline{CD}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{BC}:\overline{AG}$。由此即得。$\|$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第三區（台北市）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1、設$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。若$a$與$b$為有理數且滿足

$$\sqrt{a+b\alpha}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}+\alpha\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\ ,$$

則有理數對(a,b)為＿＿＿＿＿＿。

2、級數$\sum_{k=1}^{200}(-1)^{k-1}(2k-1)^2=1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots-399^2$之和等於＿＿＿＿＿＿。

3、滿足方程組

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=2(y^4-x^4)\end{cases}$$

的實數對$(x,\ y)$為＿＿＿＿＿＿。

4、若$\frac{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}{1+\cos 4x}-\cos 2x-\frac{1}{4}=0$，則$\cos 2x$等於＿＿＿＿＿＿。

5、在坐標平面上，與兩拋物線$y=x^2$、$y=-x^2+2x-5$都相切的直線方程式為＿＿＿＿＿＿。(兩解)

6、若正實數x滿足$(9^{\log x}+19)^{\log 9}+19=x$，其中的log表示常用對數，則正實數$x$等於＿＿＿＿＿＿。

7、在一個直圓錐面的內部置一正立方體，使正立方體的一面在直圓錐面底部的圓上，而正立方體的其餘四個頂點在直圓錐面上。若直圓錐面的底半徑為10而高 為30，則此正立方體的邊長為＿＿＿＿＿＿。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第三區（台北市）　筆試(二)【參考解答】

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答案欄

（一）	（二）	（三）	（四）
$(2,1)$	-80000	$(\frac{\sqrt[5]{3}+1}{2},\frac{\sqrt[5]{3}-1}{2})$	$-\frac{1}{2}$
（五）	（六）	（七）	
$2x+y+1=0$， $4x-y-4=0$	100	$\frac{600}{30\sqrt{2}+20}$	

$\frac{90\sqrt{2}-60}{7}$

總計：＿＿＿＿＿＿＿＿

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第四區（新竹區）　筆試(一)試題

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分49分，第一題16分，第二題16分，第三題(a)9分，(b)8分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 不可使用計算器，請關閉手機電源。
5. 請將答案寫在答案卷內。

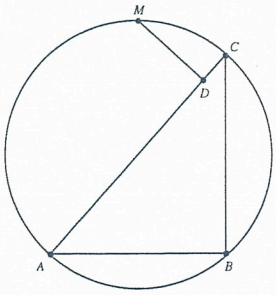
[問題一] 令C_k^n表示自n個相異物中取出k個的方法數。設數列$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{94}$滿足：

對每一個$n=1, 2, 3, \ldots, 94$，以下的等式都成立

$$2005\times C_1^{n+1} + a_1 \times C_2^{n+1} + a_2 \times C_3^{n+1} + \cdots + a_n \times C_{n+1}^{n+1} = a_n \times 2^n$$

試證：數列$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{94}$為一等差數列。

[問題二] 如圖所示，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$為給定圓上的兩弦，M為$\overset{\frown}{AMB}$中點，從M點向$\overline{AC}$作垂線的垂足為D。已知$\overline{AB}=4\sqrt{2}$，$\overline{AC}=9$且$\overline{CB}\perp\overline{AB}$，試求線段$\overline{AD}$的長度。



[問題三] 設Γ為平面上一拋物線，其準線垂直於Y軸，且開口朝上。

(a)假設原點是Γ的頂點，且自X軸上方遠處沿直線$x=a\,(a\neq 0)$射出一雷射光束，經過拋物線Γ的兩次反射後，光束沿著直線$x=b$射出。試證：不論a值為何，a與b的乘積為定值。

(b)現假設Γ的頂點在X軸上(不一定為原點)。已知自X軸上方沿直線$x=-5$射出的雷射光束，經過Γ的兩次反射後的光束是沿著直線$x=3$的方向射出；若入射光束所沿的直線是$x=-4$，則經過Γ的兩次反射後的出射光束所沿的直線是$x=6$。試求拋物線Γ的焦點座標。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第四區（新竹區）　筆試(一)【參考解答】

一、計算證明題：

1、【參考解答】：

我們將證明以下命題：對任一正整數n，$a_n = 2005(n+1)$。

令$n=1$得$2005\times c_1^2 + a_1 \times c_2^2 = a_1 \times 2^1$，則$a_1 = 2005\times 2$；故當$n=1$時，命題成立。

設對所有$k<n$時，$a_k = 2005\,(k+1)$，則

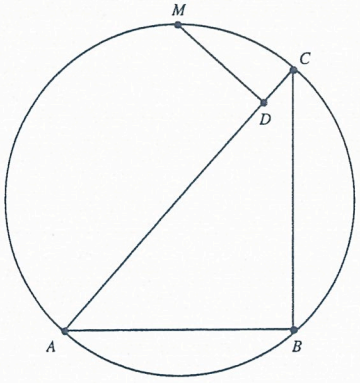
$$(2^n-1)a_n = 2005\times c_1^{n+1} + a_1\times c_2^{n+1} + a_2\times c_3^{n+1} + \cdots + a_{n-1}\times c_n^{n+1}$$

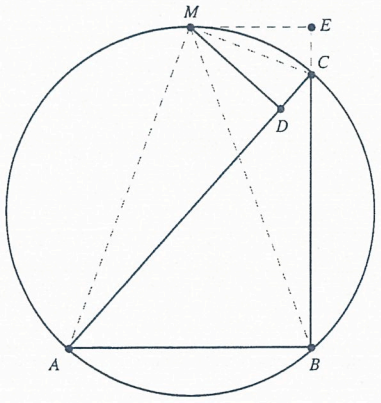
$$= 2005\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,c_{k+1}^{n+1} = 2005\sum_{k=1}^{n} k\,c_k^{n+1} = 2005\sum_{k=1}^{n}(n+1)\,c_{k-1}^{n}$$

$$= 2005(n+1)(\sum_{k=0}^{n} c_k^n - 1) = 2005(n+1)\times(2^n-1)$$

由此得$a_n = 2005(n+1)$；故由數學歸納法得知：對任一正整數n，$a_n = 2005(n+1)$。

2、如右圖所示，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$為給定圓上的兩弦，M為$\overset{\frown}{AMB}$弧的中點，從M點向$\overline{AC}$作垂線的垂足為D。已知$\overline{AB}=4\sqrt{2}$，$\overline{AC}=9$且$\overline{CB}\perp\overline{AB}$，則$\overline{AD}=?$





Ans. $\overline{AD}=8$.

【參考解答】：從M向直線BC作垂線，垂足為E；連接$\overline{MA}$、$\overline{MB}$、$\overline{MC}$．因M為$\overset{\frown}{AMB}$的中點，所以$\overline{CM}$是$\angle ACE$的角平分線；因此，$\overline{MD}=\overline{ME}$又$\overline{MA}=\overline{MB}$，

$\angle MDA=\angle MEB=90°$，所以$\Delta MAD\cong\Delta MEB$．由此可得$\overline{AD}=\overline{BE}$．

因為$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}$，$\overline{BC}=\overline{BE}-\overline{EC}=\overline{AD}-\overline{DC}$，所以$\overline{AD}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BC})$．

又$\overline{CB}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=81-32=49$，所以$\overline{CB}=7$，因而$\overline{AD}=\frac{1}{2}(9+7)=8$．

3、

【參考解答】:

(a)由光學原理，平行拋物線對稱軸的直線碰到拋物線反射之後的直線會通過拋物線的焦點。所以兩次反射之間的路徑是通過焦點的線段。今般拋物線的焦點坐標為$(0,c)$，且兩次反射之間的直線斜率為m,則兩反射點的坐標(x,y)滿足下方程組：

$$\begin{cases} 4cy = x^2 \\ y - c = mx \end{cases}$$

將變數y消去得到一個x的二次方程式：

$$x^2 - 4cmx - 4c^2 = 0$$

由題意，此方程式的兩根恰為a，b。故由根與係數關係得知$ab = -4c^2$為一常數。

(b) 現設拋物線焦點為(h,c)，$c > 0$。由(a)知

$$(-5-h)(3-h) = (-4-h)(6-h) = -4c^2$$

故解得$(h,c) = (-\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{231}}{8})$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第四區（新竹區）　筆試(二)試題

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每一題3分，共21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 不可使用計算器，請關閉手機電源。
5. 請將答案依序寫在答案欄內(勿寫在本試題卷上)。

1、滿足方程式$x^{\log x}=100x$的正實數x = ＿(一)＿。

2、滿足$15ab+27a-10b=119$之整數序對(a,b)=＿(二)＿。

3、已知$\left|x^2-3x+2\right|=ax$恰有3個實根，則a=＿(三)＿。

4、設$\angle A$為一銳角，且$\tan A=\frac{7}{4}$。已知$\angle A$內部一點P到$\angle A$兩邊的垂直距離分別為3與4，則$\overline{AP}$=＿(四)＿。

5、將**1**, **2**, **2**, **3**, **3**, **3**, **4**, **4**, **4**九個數字排成一列的方法中，**1**與**2**不相鄰的排法有＿(五)＿種。

6、設x, y為實數，則$(x-2\cos y)^2+(3x^2+9-2\sin y)^2$的最小值為＿(六)＿。

7、袋中有白球2顆、紅球3顆及藍球4顆。每次自袋中取出一球，取後不放回，每顆球被取出的機率相等，則白色球被取完而袋中尚有紅色及藍色球的機率為＿(七)＿。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第四區（新竹區）　筆試(二)【參考解答】

二、填充題：

1. 100 或 $\frac{1}{10}$

2. $(-33,-2)$

3. $3-2\sqrt{2}$

4. $\frac{1}{7}\sqrt{1625+96\sqrt{65}}$

5. 2940

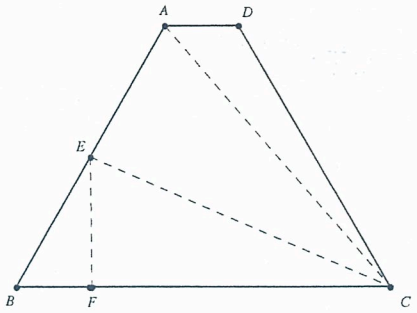
6. 49

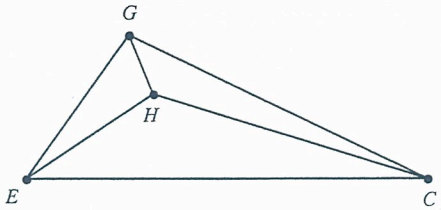
7. $\frac{22}{45}$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第四區（新竹區）　口試試題及【參考解答】

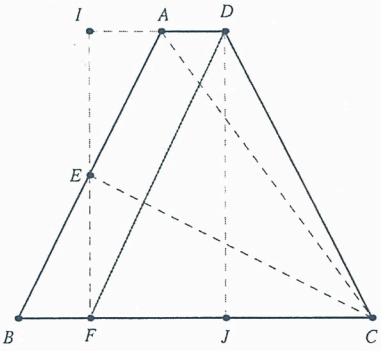
三、口試題：

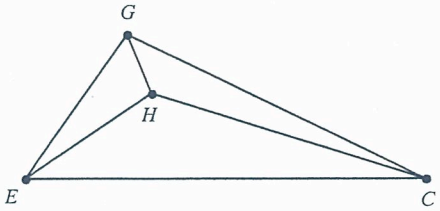
如圖所示，$ABCD$ 為一個等腰梯形，E 為 $\overline{AB}$ 的中點，F 為 E 在 $\overline{BC}$ 上的垂足。已知若將等腰梯形剪下，並將紙沿著直線 EF、直線 EC、直線 AC 折疊，使得 A、B 兩點重合於空間中的一點 G；D、F 兩點重合於空間中的一點 H。若此時恰好可以形成了一個四面體 $CEGH$，且此四面體的體積為 27 立方公分，試求 $\overline{AB}$ 為多少公分？





【參考解答】：設 E 在 $\overline{AD}$ 延長線上的垂足為 I，J 為 $\overline{CF}$ 的中點，如下圖所示。





設 $\overline{AB}=\overline{CD}=b$，$\overline{AD}=c$；由題意可知，$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{CF}=b$，$\overline{AD}=\overline{BF}=\overline{GH}=c$。因 $\Delta BEF\cong\Delta AEI$，所以 $\overline{IA}=\overline{BF}=c$。由 J 之取法及題設可知 $\frac{1}{2}b=\overline{FJ}=\overline{DI}=2c$，因而 $b=4c$。在四面體 $CEGH$ 上 EHG、EHC 兩個面在頂點 H 都是直角，此表示 $\overline{EH}$ 稜垂直於 CGH 面。設 ΔCGH 的高為 h，則它與原來梯形的高相同，所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}b$；然而，$\overline{EH}=\overline{FE}=\frac{1}{2}h$，所以四面體 $CEGH$ 的體積可計算如下：

$$\frac{1}{3}\cdot\Delta CGH\text{的面積}\cdot\overline{EH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ch\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4^3}b^3=27$$

所以 $\overline{AB}=12$ 公分。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（台中區）　筆試(一)試題

編號： _____

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 (9分) 證明$\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}>1+\sqrt{3}+\sqrt{15}$，但不允許將這些根號數化成小數後再比較大小。

二、 (10分) 設k為大於3的正偶數，以下為x,y的聯立不等式：$y\geq\frac{2x}{3k-2}$, $y\leq 2x+2k-2$, $y\leq 2kx$, $y\leq -2x+6k-2$，試問滿足以上聯立不等式的整數解(x,y)共有幾組？

三、 (10分) 設$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$為一整係數多項式$(a,b,c$為整數$)$且$P(x)=0$的三個根分別為u,v,w。若已知$a\neq 1$且$w=uv$，試證w必為整數。

四、 (10分) 考慮以三角形為底的直立三角柱，假設其中的兩側面與底部的面積總和恆等於一常數L。證明：這類三角柱達到最大體積時，這兩側面與底部三者的面積相等。

五、 (10分) 下圖是一個由正三角形所構成的無限棋盤，棋子由棋盤上任一交叉點往相鄰的交叉點移動稱為"走一步"，現在規定一個棋子的走法如下：一次走兩步，第一步可任選一個方向（有六個方向可供選擇），第二步的方向必須是第一步的方向逆時針轉60^o，下圖即顯示由A走一次可能走到$B_1,B_2,\cdots,B_5$或B_6。另外，我們定義圖中的兩個向量$\vec{a}=[1,0]$，$\vec{b}=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$。證明：若棋子能由$P$點經若干次走到$Q$點，則$\overrightarrow{PQ}=m\vec{a}+n\vec{b}$，其中$m,n$是整數且$m-n$是3的倍數。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（台中區）　筆試(一)試題【參考解答】

一、證明：$\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}>1+\sqrt{3}+\sqrt{15}$

【證明】：只需證明 $\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}>1+\sqrt{15}-2\sqrt{2}$

因為 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)^2=18+2\left(5\sqrt{2}-\sqrt{15}-\sqrt{30}\right)$

$\left(1+\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)^2=18+2\left(\sqrt{15}-\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)$

所以

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)^2-\left(1+\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$=12\sqrt{2}-4\sqrt{15}$$

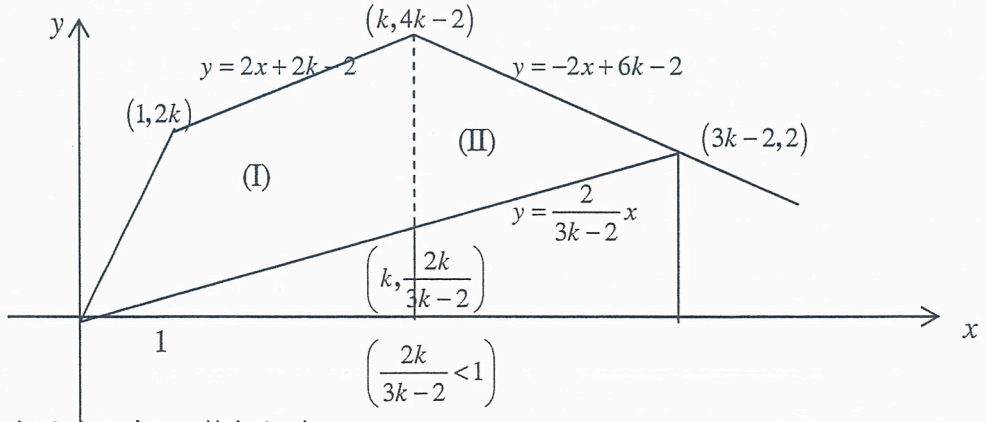
$$=4\left(\sqrt{18}-\sqrt{15}\right)>0$$

因此 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)^2>\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

故 $\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}>1+\sqrt{15}-\sqrt{2}$

即有 $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}>1+\sqrt{3}+\sqrt{15}$

二、$\begin{cases} y\le 2x+2k-2 \\ y\le 2kx \\ y\ge \dfrac{2x}{3k-2} \end{cases}$ $\begin{cases} k>4 \\ y\le -2x+(6k-2) \end{cases}$



在區域(I)中　，整數解為

$(0,0)$			$\rightarrow$	1	組
$(1,1)$	$\cdots$	$(1,2k)$	$\rightarrow$	$2k$	組
$(2,1)$	$\cdots$	$(2,2k+2)$	$\rightarrow$	$2k+2$	組
$(3,1)$	$\cdots$	$(3,2k+4)$	$\rightarrow$	$2k+4$	組
$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k,1)$	$\cdots$	$(k,4k-2)$	$\rightarrow$	$4k-2$	組

共有$1+\sum_{i=1}^{k}2(k+i-1)=1+2k^2+2\sum_{i=1}^{k}2(i-1)=1+2k^2+k(k-1)=3k^2-k+1$(組)

因為k為偶數，在區域(II)中整數解為

$(k+1,1)$	$\cdots$	$(k+1,4k-4)$	$\rightarrow$	$4k-4$	組
$(k+2,1)$	$\cdots$	$(k+2,4k-6)$	$\rightarrow$	$4k-6$	組
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\left(\frac{3k}{2}-1,1\right)$	$\cdots$	$\left(\frac{3k-1}{2},3k\right)$	$\rightarrow$	$3k$	組
$\left(\frac{3k}{2},2\right)$	$\cdots$	$\left(\frac{3k}{2},3k-2\right)$	$\rightarrow$	$3k-3$	組
$\left(\frac{3k}{2}+1,2\right)$	$\cdots$	$\left(\frac{3k}{2}+1,3k-4\right)$	$\rightarrow$	$3k-5$	組
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$(3k-2,2)$	$\cdots$	$\cdots$	$\rightarrow$	1	組

共有 $\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}(4k-2i-2)+\sum_{i=0}^{\frac{3k}{2}}(3k-2i-3)$

$$=(4k-2)\left(\frac{k}{2}-1\right)-2\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1}i+(3k-3)\left(\frac{3k}{2}-1\right)-2\sum_{i=1}^{\frac{3k}{2}-2}i$$

$$=\left(4k-\frac{k}{2}-2\right)\left(\frac{k}{2}-1\right)+\left(\frac{3k}{2}-1\right)\left(\frac{3k}{2}-1\right)$$

$$=4k^2-\frac{15}{2}k+3$$

而 $3k^2-k+1+4k^2-\frac{15}{2}k+3=7k^2-\frac{17}{2}k+4$

因此，總共有$7k^2-\frac{17}{2}k+4$個整數解。

三、【證明】：由根與係數關係知 $\begin{cases} u+v+uv=-a \\ uv(1+u+v)=b \\ u^2v^2=-c \end{cases}$

$\therefore b-c=uv(1+u+v+uv)=uv(1-a)$

$\Rightarrow uv=\dfrac{b-c}{1-a}\in\mathbb{Q}\quad(\because a\neq 1,\ a,b,c\in\mathbb{Q})$

又 $u^2v^2=-c\in\mathbb{Q}$ ，$\therefore uv\in\mathbb{Q}$ ，即 $w\in\mathbb{Q}$ 。

四、設底部三角形與兩側面的共邊邊長分別為 a,b ，它們夾角為 θ ，稜柱高為 c 。那麼

$L=ac+bc+\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ ，體積 $V=\dfrac{1}{2}abc\sin\theta$ ，

令 $X=ac,\ Y=bc,\ Z=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ ，那麼 $L=X+Y+Z$ 且 $V^2=\dfrac{1}{2}XYZ\sin\theta$

由算術－幾何不等式得 $(XYZ)^{\frac{1}{3}}\le\dfrac{X+Y+Z}{3}$

所以

$$V^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^3\sin\theta\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L}{3}\right)^3,\quad \text{即}V\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

當 $X=Y=Z=\dfrac{L}{3},\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，V 達到最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

一組可能邊長為 $a=b=2c=\sqrt{\dfrac{2L}{3}}$ 。

五、假設從 P 點出發，走了 k 次後到 Q 點，令 $P_0=P,P_1,\cdots,P_n=Q$ 為路徑中停駐的點，則

$\overrightarrow{PQ}=\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ ，

令 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{na}$ ， $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=m_i\vec{a}+n_i\vec{b}$

$m=\sum_{i=1}^{k}m_i$ ， $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$ ， 每一步 $m_i\vec{a}+n_i\vec{b}$ 有以下 6 種可能：

$(m_i,n_i)\in\{(1,1),(-1,2),(-2,1),(-1,-1),(1,-2),(2,-1)\}$

$m_i-n_i=0,-3,3$ 因而 m_i-n_i 是 3 的倍數，

所以 $m-n=\sum_{i=1}^{k}(m_i-n_i)$ 也是 3 的倍數。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（台中區）　筆試(二)試題

編號： _____

（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分爲二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、若兩正整數a和b的最大公因數為10，則a^3和b^4的最大公因數可能為何？_____。(3分)

二、設$N=2^1+2^4+2^9+2^{16}+\cdots+2^{81}+2^{100}$。若N以十進位表示出來是$a$位數且首位數字與個位數字分別為$b$與$c$，求$a+b+c$之值。_____（已知$\log 2=0.3010$）(3分)

三、設二次曲線$\Gamma: 9x^2+16y^2-18x-64y-71=0$與直線$L: 2x-5y-10=0$，若要在$\Gamma$上找一點$P$使得$P$到$L$的距離為最短，則$P$的坐標為何？_____ (3分)

四、有6個外表相同的袋子，其中有4個袋子各裝有4黑球及1白球，稱為A袋；其餘2個袋子各裝有4黑球及6白球，稱為B袋。今隨機選一個袋子並從中隨機取出兩球，若此兩球為一黑一白，試問此兩球來自A袋的機率有多少？_____ (4分)

五、一張紙ABCD是邊長為1的正方形，以A為圓心，$\overline{AB}$為半徑，作一個四分之一圓弧BD。設E與F分別在$\overline{AB}$與$\overline{AD}$上，將這張紙對$\overline{EF}$對摺恰使得A落在圓弧BD上，求ΔAEF面積的最大值。_____ (4分)

六、對於任一正整數n，$\langle n\rangle$表示最接近$\sqrt{n}$的正整數，例如$\langle 1\rangle=1$，$\langle 2\rangle=1$，$\langle 3\rangle=2$。設k為正整數，令$A_k=\{n\in N \mid \langle n\rangle=k\}$，求$\sum_{n\in A_k} n$之值（以$k$表示出來）。_____ (4分)

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（台中區）　筆試(二)【參考解答】

一、1000, 2000, 5000, 10000　　二、32

三、$\left(\frac{49}{17},\frac{-11}{17}\right)$　　四、$\frac{3}{5}$(或0.6)

五、$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　六、$2k^3+k$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（嘉義區）　筆試(一)試題

編號： _____

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、 (12分) 電影院經理宣佈，在排成一長列等候購票的顧客中，從前面數起，第一位與排在其前面任一人生日相同的顧客，將可獲得一張免費的電影票。假設每一個人出生於一年(365日)中任何一天的機率是相同的。試求

(1) 從前面數起，排在第 k 個位置會獲得電影票的機率 P_k。

(2) 使 P_k 為最大的 k 是多少？

二、 (12分) 若 a 為無理數，n 為大於 1 的自然數，試證 $(a+\sqrt{a^2-1})^{-\frac{1}{n}}+(a-\sqrt{a^2-1})^{-\frac{1}{n}}$ 是無理數。

三、 (13分) 試證：當 a, p 其一為無理數時

$$[(1-a)+(1+a)i]x_1+[(1+a)-(1-a)i]x_2+ap(1-i)x_3+ap(1+i)x_4=ap$$

無整數解。

四、 (12分) 凸四邊形之四邊長為 a,b,c,d，令 $S=\frac{a+b+c+d}{2}$，A 為一組對角和，試證該四邊形之面積為 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A}{2}}$

由此或用其他方法解下面問題：求周長為 $2s$ 的四邊形之中，面積為最大的四邊形。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（嘉義區）　筆試(一)【參考解答】

一、【解】P_k = Prob（排在第 k 個位置得到電影票）

= Prob（第 k 個人與前面$(k-1)$之中有相同生日| 前面$(k-1)$人生日皆不同）

$= \frac{P_{365,k-1}}{365^{k-1}} \cdot \frac{k-1}{365}$，其中　$P_{m,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

欲求k使得P_k有最大值；也就是找到最大的k使得$P_{k+1} - P_k < 0$，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{\frac{P_{365,k}}{365^k} \cdot \frac{k}{365}}{\frac{P_{365,k-1}}{365^{k-1}} \cdot \frac{k-1}{365}} = \left(\frac{365-k+1}{365}\right)\left(\frac{k}{k-1}\right) < 1$$

$k > 19.612 \quad \therefore k = 20$

二、【證】令$N = \left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$

令$b = \left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$，則$N = b + \frac{1}{b}$。

假設N是有理數

由等式　$b^{m+1} + \frac{1}{b^{m+1}} = \left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b^m + \frac{1}{b^m}\right) - \left(b^{m-1} + \frac{1}{b^{m-1}}\right)$

$m=1$，$b^2 + \frac{1}{b^2} = N \cdot N - 2$是有理數

$m=2$，$b^3 + \frac{1}{b^3} = N \cdot \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) - N$是有理數

$m=3$，$b^4 + \frac{1}{b^4} = N \cdot \left(b^3 + \frac{1}{b^3}\right) - \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$是有理數

…

$b^m + \frac{1}{b^m}$是有理數$\forall m \in \square$，$b^n + \frac{1}{b^n}$亦是有理數

但$b^n + \frac{1}{b^n} = a+\sqrt{a^2-1} + a-\sqrt{a^2-1} = 2a$是有理數矛盾

$\Rightarrow N = \left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$是無理數。

三、【證】比較實部與虛部，原方程與下組方程等價

$$\begin{cases}(1-a)x_1+(1+a)x_2+px_3+px_4=p\\(1+a)x_1-(1-a)x_2-px_3+px_4=0\end{cases}\qquad(*)$$

將其改寫為

$$\begin{cases}(x_2-x_1)a+p(x_3+x_4-1)=-(x_1+x_2)\\(x_1+x_2)a+p(-x_3+x_4)=x_2-x_1\end{cases}\qquad(**)$$

若 $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3+x_4-1\\ x_2+x_1 & -x_3+x_4\end{vmatrix}\neq 0$

則 a 可表為 x_1,x_2,x_3,x_4 之有理函數，故 a,p 必為有理數，與假設矛盾

因此若原方程有整數解 $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3+x_4-1\\ x_1+x_2 & -x_3+x_4\end{vmatrix}=0$，同時(**)因有解，

故 $(x_2-x_1):(x_1+x_2)=(x_3+x_4-1):(-x_3+x_4)=-(x_1+x_2):(x_2-x_1)$

因此 $(x_2-x_1)^2+(x_1+x_2)^2=0$

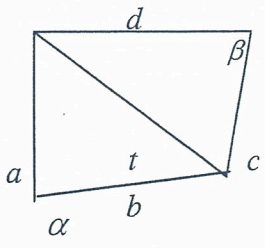
$$\|$$

$$2(x_1^2+x_2^2)$$

$$x_1=x_2=0$$

代回(**)，因 $p\neq 0$，有 $\begin{cases}x_3=x_4\\x_3+x_4=1\end{cases}$，解得 $x_3=x_4=\frac{1}{2}\notin Z$。

四、【證】如圖，$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$，



$$ab\cos\alpha-cd\cos\beta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}$$

四邊形面積 $S=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+cd\sin\beta)$

$$S^2=\frac{1}{4}(a^2b^2\sin^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta)$$

$$\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4}=a^2b^2\cos^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta-2abcd\cos\alpha\cos\beta$$

$$4S^2+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos\left(\alpha+\beta\right)$$

$$S^2=\frac{1}{16}\left\{4\left(a^2b^2+c^2d^2\right)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-fabcd\cos\left(\alpha+\beta\right)\right.$$

$$\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)=\frac{1}{16}\left(-a+b+c+d\right)\left(a-b+c+d\right)$$

$$\cdot\left(a+b+c-d\right)\left(a+b-c+d\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(c+d\right)^2-\left(a-b\right)^2\right)\left(\left(a+b\right)^2-\left(c-d\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left\{\left(c+d\right)^2\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2\left(c-d\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2-\left(c^2-d^2\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\left\{2\left(a^2+b^2\right)\left(c^2-d^2\right)+fabcd-\left(a^2-b^2\right)^2-\left(c^2-d^2\right)^2\right\}$$

$$\therefore s^2=\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-b\right)\left(s-d\right)-\frac{1}{2}abcd\left(1+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$=\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$s\le\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}\le\left(\frac{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

當$a=b=c=d=\frac{s}{2}$時，$A=180^0$時，四邊形為正方形，且$s=\left(\frac{s}{2}\right)^2$

故周長為$2s$最大面積之四邊形為正方形。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（嘉義區）　筆試(二)試題

編號：＿＿＿＿＿＿

（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題證明題，滿分為二十一分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、求最小自然數 m 使得下列不等式對所有自然數 n 成立 (5分)

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} < m \text{。}$$

二、令 $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2-y^2\geq 1\}$ 與 $B=\{(x,y)\in R^2 : (x-2)^2+y^2\leq 1\}$。試證明 (5分)
$B\subseteq A$。

三、設四邊形 $ABCD$ 的邊 BA, CD 的延長線相交於 G，對角線 BD, AC 的中點為 E, F，則 (5分) ΔGEF 的面積

$$S_{\Delta GEF}=\frac{1}{4}\text{（四邊形 }ABCD\text{ 面積）。}$$

四、(1)介於 0 和 10,000 整數中有多少個數的十進位表示法中，正好有一個 5。
(3) 同樣問題，但 10,000 改為 100,000。 (6分)

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

中區（嘉義區）　筆試(二)【參考解答】

一、【解】$\binom{2n}{n}<\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\cdots+\binom{2n}{n}+\cdots+\binom{2n}{2n}=(1+1)^{2n}=4^n$

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}<4 \qquad \forall n\in N$$

但$n=5$，$\binom{10}{5}=252>3^5$

$$\binom{10}{5}^{\frac{1}{5}}>3$$

$n=4$，$\binom{8}{4}^{\frac{1}{4}}>2$

故　$m=4$。

二、【解】令$(p,q)=(2+\cos\theta,\sin\theta)$，由直接演算，我們獲得

$$(2+\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2\geq 1\Leftrightarrow 3+4\cos\theta+2\cos^2\theta\geq 1。$$

三、【解一】

$S_{\Delta GEF}=S_{\Delta ECG}-(S_{\Delta ECF}+S_{\Delta GCF})$

由E為BD的中點，所以

$$S_{\Delta ECG}=\frac{1}{2}S_{\Delta GBC} \qquad (1)$$

又F為AC的中點，所以

$$S_{\Delta ECF}=\frac{1}{2}S_{\Delta AEC} \qquad (2)$$

$$S_{\Delta GCF}=\frac{1}{2}S_{\Delta AGC} \qquad (3)$$

把(1)、(2)、(3)代入最初式子中

$$\therefore \quad S_{\Delta GEF}=\frac{1}{2}\left[S_{\Delta GBC}-\left(S_{\Delta AEC}+S_{\Delta AGC}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\text{四邊形 }ABCE\text{ 的面積}$$

而 E 為 BD 的中點，所以

$$\text{四邊形 }ABCE\text{ 的面積}=\frac{1}{2}\text{四邊形 }ABCD\text{ 的面積}$$

故 $S_{\Delta GEF}=\frac{1}{4}$ 四邊形 $ABCD$ 面積。

【解二】

令 $A=(e,f),B=(0,0),C=(a,b),D=(c,d)$，則 $E=\left(\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right),F=\left(\frac{e+a}{2},\frac{b+f}{2}\right)$。

解 $\overline{AB}$ 直線方程式，得：$y=\frac{f}{e}x$

解 $\overline{CD}$ 直線方程式，得：$y=\frac{b-d}{-a+c}x-\frac{bc-ad}{a-c}$

由上述二方程式解得交點 G 座標為 $\left(\frac{(bc-ad)e}{be-de-af+cf},\frac{(-bc+ad)f}{-be+de+af-cf}\right)$

所以平行四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & a & c & e & 0\\ 0 & b & d & f & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(ad+cf-bc-de)$

而 ΔEFG 面積 $=\begin{vmatrix}\frac{c}{2} & \frac{e+a}{2} & \frac{(bc-ad)e}{be-de-af+cf} & \frac{c}{2}\\ \frac{d}{2} & \frac{b+f}{2} & \frac{(-bc+ad)f}{-be+de+af-cf} & \frac{d}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{8}(ad+cf-bc-de)$

故 $S_{\Delta GEF}=\frac{1}{4}$ 四邊形 $ABCD$ 面積。

四、【解】

(i) S_i 表 i 位數且正好有一個 5 的正整數所成的集合，則 $|S_1|=1$，$|S_2|=8+9=17$，

$|S_3|=8\times9+8\times9+9\times9=225$，

$|S_4|=8\times9\times9+8\times9\times9+8\times9\times9+9\times9\times9=2673$，

所以滿足條件的四位數 $=\sum|S_i|=2916$。

(ii)32805（同理）。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（台南區）　筆試(一)試題

注意事項：

(1) 測試時間分配：2 小時

(2) 本試卷共 5 題，滿分 49 分。第一題 10 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 9 分。

(3) 請將計算、證明過程須完整依序寫在答案卷上。

(4) 不可以使用電算器。

(5) 試題與答案一同繳回。

[問題一] ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，若 a,b,c 成等差數列，

試求 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$ 的值。

[問題二] 設 p,q,r 為質數，試求滿足條件 $p^3=p^2+q^2+r^2$ 之所有可能 (p,q,r) 之值。

[問題三] 設 $a_1,a_2,...,a_n$ 皆為正數，求證：$\sum_{k=1}^{n}a_k\le\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+...+\frac{a_n^2}{a_1}$。

[問題四] 已知 $f(x)=5-6x+x^2$，求滿足 $f(x)+f(y)\le 0$ 和 $f(x)-f(y)\ge 0$ 的點 (x,y) 在平面上所圍區域的面積，

[問題五] 求 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{10000}}$ 的整數部分。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（台南區）　筆試(一)【參考解答】

［問題一］ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，若 a,b,c 成等差數列，

試求 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$ 的值。

參考答案：　令 $a=b-t,c=b+t,\therefore s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3b}{2}$.

$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{r^2}{(s-a)(s-c)}=\frac{r^2}{\frac{b^2}{4}-t^2}$，其中 r 為其內接圓之半徑。

因此 ΔABC 的面積 $=rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore r^2\cdot\frac{9b^2}{4}=\frac{3b}{2}(\frac{b}{2}+t)(\frac{b}{2})(\frac{b}{2}-t)$　$\therefore 3r^2=\frac{b^2}{4}-t^2$　故 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ 。

［問題二］設 p,q,r 為質數，試求滿足條件 $p^3=p^2+q^2+r^2$ 之所有可能 (p,q,r) 之值。

參考答案：只有一組解 $(p,q,r)=(3,3,3)$

如果 $p=2$，$\therefore q^2+r^2=4$ 則無解，因此 $p>2$ 為奇數。

$\because q^2+r^2=p^3-p^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ $\therefore p\mid q^2+r^2$

$\therefore p\mid q$，$q\mid r$ 或 $p=4k+1$，$k\in N$

若 $p\mid q$，$q\mid r$ $\therefore p=q=r$ $\therefore 3p^2=p^3\Rightarrow p=3=q=r$

若 $p=4k+1$，$\because q^2+r^2=p^3-p^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$，$\therefore 4\mid q^2+r^2$

$\therefore 2\mid p$，$2\mid q$ $\therefore p=r=2$ $\therefore p=2$. 但 $(p,q,r)=(2,2,2)$ 不是解

［問題三］設 $a_1,a_2,...,a_n$ 皆為正數，求證： $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+...+\frac{a_n^2}{a_1}$ 。

參考答案： $\because \frac{a_1^2}{a_2}+a_2 \ge 2a_1$ ，$\frac{a_2^2}{a_3}+a_3 \ge 2a_2$ ，…，$\frac{a_n^2}{a_1}+a_1 \ge 2a_n$

∴將上述各式加起來，便可得證。

［問題四］已知 $f(x)=5-6x+x^2$ ，求滿足 $f(x)+f(y)\le 0$ 和 $f(x)-f(y)\ge 0$ 的點 (x,y) 在平面上所圍區域的面積，

參考答案：4π

［問題五］求 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{10000}}$ 的整數部分。

參考答案：因為 $198<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100}<199$ ，故整數部分是 198

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（台南區）　筆試(二)試題

注意事項：
（1）　測試時間分配：1小時
（2）　本試卷共5題，滿分21分。第一題5分，第二題4分，第三題4分，第四題4分，第五題4分。
（3）　請將計算、證明過程須完整依序寫在答案卷上。
（4）　不可以使用電算器。
（5）　試題與答案一同繳回。

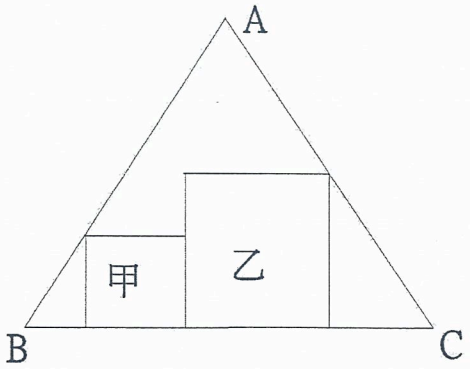
［問題一］試求方程式 $(x+6)5^{1-|x-1|}-x=(x+1)\left|5^x-1\right|+5^{x+1}+1$ 的所有實數解。

［問題二］已知 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\in\{-1,0,1\}$ ，試問 $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$ 的值為正整數者共有多少個？

［問題三］若有兩複數分別為 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ， $w=\cos\beta+i\sin\beta$ 且 $z+w=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ ，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值。

［問題四］若 a ，b 均為整數，且方程式 $x^2-ax+817=0$ 與 $x^2-bx+3553=0$ 有一共同質數根，則 $a+b=$？

［問題五］在邊長為10的正三角形 ΔABC 內部，如圖所示的方式，內接有甲、乙兩個正方形（甲、乙有一邊相重疊，且各有一邊位於 $\overline{BC}$ 上，甲正方形一頂點在 $\overline{AB}$ 上，乙正方形有一頂點在 $\overline{AC}$ 上）。試求：甲、乙兩面積之和的最小值。



94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（台南區）　筆試(二)【參考解答】

［問題一］試求方程式 $(x+6)5^{1-|x-1|}-x=(x+1)\left|5^{x}-1\right|+5^{x+1}+1$ 的所有實數解。

參考答案：當 $x\geq 1$ 時，原方程式可化為 $(x+6)(5^{x}-5^{2-x})=0$，所以 $x=1$

當 $0\leq x<1$ 時，方程式為恆等式，所以解為 $0\leq x<1$

當 $x<0$ 時，原方程式可化為 $2(5^{x}-1)(x+1)=0$，所以 $x=-1$

故解集為 $\{-1,1\}\cup\{x\mid 0\leq x<1\}$

［問題二］已知 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\in\{-1,0,1\}$，試問 $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$ 的值為正整數者共有多少個？

參考答案：若 $a_4=1$，則 $a_0,a_1,a_2,a_3\in\{-1,0,1\}$ 共有 3^4 種選擇。

若 $a_4=-1$，則 $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$ 不可能有正數。

若 $a_4=0$，同理討論 a_3，故 $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$ 的值為正整數共有 $3^0+3^1+3^2+3^3+3^4=121$ 個。

［問題三］若有兩複數分別為 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$w=\cos\beta+i\sin\beta$ 且 $z+w=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值。

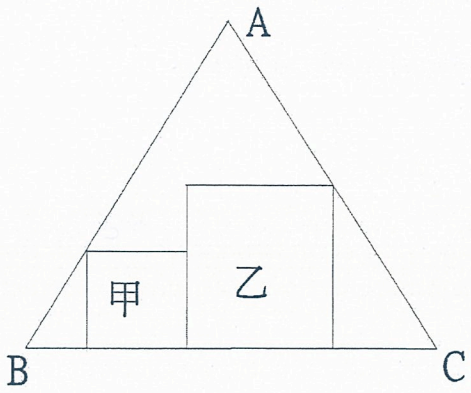
參考答案：利用和差化積，解得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$

進而解得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$

［問題四］若 a，b 均為整數，且方程式 $x^2-ax+817=0$ 與 $x^2-bx+3553=0$ 有一共同質數根，則 $a+b=?$

參考答案：解得 $a=62$，$b=206$，故 $a+b=268$。

［問題五］在邊長為 10 的正三角形 ΔABC 內部，如圖所示的方式，內接有甲、乙兩個正方形（甲、乙有一邊相重疊，且各有一邊位於 $\overline{BC}$ 上，甲正方形一頂點在 $\overline{AB}$ 上，乙正方形有一頂點在 $\overline{AC}$ 上）。試求：甲、乙兩面積之和的最小值。



參考答案：設甲、乙正方形邊長分別為 x 、 y ，則 $x+y=\frac{30}{3+\sqrt{3}}$ ，

當 $x=y=\frac{15}{3+\sqrt{3}}$ ， x^2+y^2 有最小值是 $2[\frac{5}{2}(3-\sqrt{3})]^2=150-75\sqrt{3}$ 。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(一)試題

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由
　　作答時間二小時

1、設 $f(x)=x^{2005}+x^{2004}+\cdots+x+1$，試求 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數。

2、設 a,b,n 為整數，若 $a+b$ 可被 n 所整除，且 a^2+b^2 可被 n^2 所整除。

試證：對所有正整數 k，a^k+b^k 可被 n^k 所整除。

3、已知正數 a,b,c 滿足 $abc=1$. 試證：

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}$$

4、在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 為 $\overline{AC}$ 的中點、且 $\overline{BD}=\sqrt{3}$。試問當 $\angle BAC$ 為何值時，ΔABC 的面積有最大值？此面績最大值為何？

5、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，若 P 為正方形外之一點使 $\overline{AP}//\overline{BD}$，且 $\overline{BP}=\overline{BD}$，

試求：(a) $\angle APD$ 的度數 (b) 線段 $\overline{AP}$ 之長

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(一)【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由

作答時間二小時

1、設 $f(x)=x^{2005}+x^{2004}+\ldots+x+1$，試求 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數。

（解）：$f(x^{2006})=(x^{2006})^{2005}+(x^{2006})^{2004}+\ldots.+x^{2006}+1$

$=【(x^{2006})^{2005}-1】+【(x^{2006})^{2004}-1】+\ldots+(x^{2006}-1)+2006$

$=(x^{2006}-1)【H(x)】+2006$

$=(x-1)【(x^{2006})^{2005}+(x^{2006})^{2004}+\ldots.+x^{2006}+】H(x)+2006$

故 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數為 2006

2、設 a,b,n 為整數，若 $a+b$ 可被 n 所整除，且 a^2+b^2 可被 n^2 所整除。

試證：對所有正整數 k，a^k+b^k 可被 n^k 所整除。

（解）：只需證明 $n\mid a$, 且 $n\mid b$.

因為 $n\mid b$. $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$, 所以 $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$, $n^2\mid 2ab$.

$p^m\mid a, p^m\mid b$. 令 p 為 n 的任意質因數，且 m 為其冪次方，a,b

$\therefore p^\alpha\mid 2ab$, 其中　$\alpha\geq 2m$, 因此 $p^\beta\mid ab$, 其中　$\beta\geq 2m-1$.

所以　a,b 中至少有一數被 p^m 整除。又 $p^m\mid a+b$,

因此 $p^m\mid a, p^m\mid b$. 故 $n\mid a$, 且 $n\mid b$. 得證。

3、已知正數 a,b,c 滿足 $abc=1$. 試證：

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\quad\text{(難)}$$

（解）：利用算幾不等式 $\frac{(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{2}\geq\sqrt{(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}}$，因此 $\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}$.

同理可得：$\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}$，及 $\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}$.

所以 原式左邊 $\geq\frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}=\sqrt{2}$

(因為 $abc=1$, 所以

$$\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{1+a+ab}=1.)$$

4、在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 為 $\overline{AC}$ 的中點、且 $\overline{BD}=\sqrt{3}$。試問當 $\angle BAC$ 為何值時，ΔABC 的面積有最大值？此面績最大值為何？

（解）：設 $c=\overline{AB}=\overline{AC}$ 及 $\alpha=\angle BAC$

利用餘弦定理 $3=c^2+(\frac{c}{2})^2-c^2\cos\alpha$ 得 $c^2=\frac{12}{5-4\cos\alpha}$，

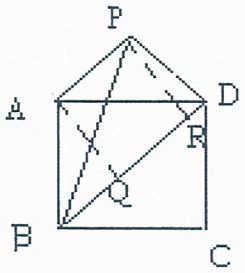
ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha=\frac{6\sin\alpha}{5-4\cos\alpha}=\frac{12}{9\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}$

因為 $9\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\geq 6$，故當 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ 時，所求 ΔABC 面積有最大值 2。

5、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，若 P 為正方形外之一點使 $\overline{AP} // \overline{BD}$，且 $\overline{BP} = \overline{BD}$，

試求：(a) $\angle APD$ 的度數 (b) 線段 $\overline{AP}$ 之長

(解)：過 A 及 P 分別作 $\overline{BD}$ 的垂線，得到垂足 Q，R



由 $\overline{AP} // \overline{BD}$，得 AQ=PR，又 $\angle ABD = 45^\circ$，

故 $AQ = BQ = PR = \sqrt{2}$ $\because BD = BP = 2\sqrt{2}$，$\therefore PR = \frac{1}{2} BP$，

$\angle PBR = 30^\circ$ 得到 $\angle BPD = \angle BDP = 75^\circ$ 而有 $\angle APD = 105^\circ$

$BR = \sqrt{BP^2 - PR^2} = \sqrt{6}$，$AP = QR = BR - BQ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(二)試題

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由

作答時間一小時

1、證明：若 $x>0, y>0$ 且 $x^3+y^3=x-y$，則 $x^2+y^2<1$。(易)

證明：$x>y>0$，$1=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}>\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2>x^2+y^2$。

2、已知 $m,n\in N, m>n$ 且 (4^m+4^n) 可被100整除，求 $m+n$ 之最小值。(易)

略解：$\because 100\mid 4^n(4^{m-n}+1)\ \therefore 25\mid 4^{m-n}+1$；得知 $m-n=5$

解得最小值 $m=6$，$n=1$，故 $m+n=7$。

3、已知實數 x, y 滿足條件：$\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos x+\sin y=1\end{cases}$，試證：$\cos 2x=\cos 2y$ (易)

略解：將條件中的二式兩邊都平方，化簡後得 $\sin x\cos y+\sin y\cos x=0$,

即 $\sin(x+y)=0$,　所以　$x+y=k\pi, k$ 為整數。故 $\cos 2x=\cos 2y$.

4、試求所有實數數對 (a,b) 使得 $6x^2-24x-4a=0$, 及 $x^3+ax^2+bx-8=0$ 的解都是非負實數解。

略解：$(a,b)=(-6,12)$ (中等)

5、空間中, E 平面上有一個正三角形 ΔABC，正射影到另一 F 平面上，得到一個新三角形 $\Delta A'B'C'$，其三邊長分別為 2，3，$2\sqrt{3}$，試求兩平面夾角 θ.(易)

略解：$\theta=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{429}}{39}$

6、將一個矩形方格板像西洋棋盤那樣地塗上黑白色，於是矩形的對角線也被分成黑色與白色的線段；若矩形每個方格邊長為1單位，而矩形的長和寬分別為51單位和49單位，試求對角線上白色線段長之和與黑色線段長之和的比。

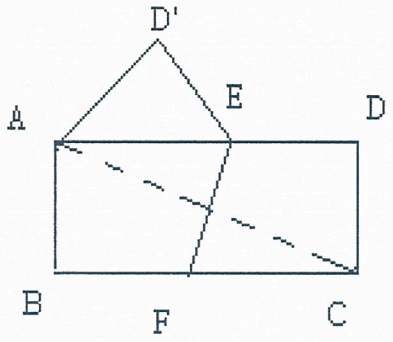
略解：白色線段長之和與黑色線段長之和的比=

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　口試試題

口試題目：

下圖中，將面積為 1 的矩形 $ABCD$ 沿一直線摺疊使 C 與 A 重合，其摺痕為 $\overline{EF}$，若點 D 落在 D' 位置，試問五邊形 $ABFED'$ 的面積其最小值為何？



94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高屏區）　筆試(一)試題

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由
　　作答時間二小時

1、設$a_1,a_2,...,a_{2005}>0$，試證：$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{2004}^2}{a_{2005}}+\frac{a_{2005}^2}{a_1}\geq 2\sum_{k=1}^{2005}a_k$ 是否成立?

2、設f為實數函數，若對任意實數u，v均滿足$f(u)\cdot f(v)=f(u-2v)+f(u+2v)$且$f(1)=1$，若$x$為正整數，試求　$f(12x+1)$之值。

3、設實數 c,d,x,y 滿足 $\begin{cases}cx+dy=3\\cx^3+dy^3=16\end{cases}$ 且 $\begin{cases}cx^2+dy^2=3\\cx^4+dy^4=16\end{cases}$

試求：cx^5+dy^5之值。

4、從1到200這200個自然數中，取出n個數，使取出的任何兩個數的和都不等於n，則n的最大可能值為何？

5、設 ΔABE 在正方形 $ABCD$ 的外側，$AE=BE$；若 F 在線段 AE 上，且 $EF=AB$，$BF=BD$，試証：$\angle AEB=\frac{\pi}{7}$。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高屏區）　筆試(一)【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由
　　作答時間二小時

1、設$a_1,a_2,...,a_{2005}>0$，試證：$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{2004}^2}{a_{2005}}+\frac{a_{2005}^2}{a_1}\geq 2\sum_{k=1}^{2005}a_k$ 是否成立?

Sol:

令$a_1=a_2=\cdots=a_{2005}=1$

則不等式左式= $1+1+1+\cdots+1=2005$

不等式右式= $2(1+1+1+\cdots+1)=2(2005)=4010$

顯然 左式<右式
故不等式無法成立

2、設f為實數函數，若對任意實數u，v均滿足$f(u)\cdot f(v)=f(u-2v)+f(u+2v)$且$f(1)=1$，若$x$為正整數，試求 $f(12x+1)$之值。

Sol:

令$u=x+2$，$v=1$

$f(x+2)=f(x)+f(x+4)$

因此 $f(x+4)=f(x+2)+f(x+6)$

由以上二式得 $f(x+6)=-f(x)$

故 $f(x+12)=-f(x+6)=f(x)$

$f(12x+1)=f(12(x-1)+1+12)=f(12(x-1)+1)=\cdots\cdots=f(1)=1$

3、設實數 c,d,x,y 滿足 $\begin{cases} cx+dy=3 \\ cx^3+dy^3=16 \end{cases}$ 且 $\begin{cases} cx^2+dy^2=3 \\ cx^4+dy^4=16 \end{cases}$

試求：cx^5+dy^5 之值。

Sol:

$$\because cx^3+dy^3=16=(cx^2+dy^2)(x+y)-(cx+dy)xy=7(x+y)-3xy$$

$$cx^4+dy^4=42=(cx^3+dy^3)(x+y)-(cx^2+dy^2)xy=16(x+y)-7xy$$

$$\therefore \quad x+y=-14, xy=-38$$

$$cx^5+dy^5=(cx^4+dy^4)(x+y)-(cx^3+dy^3)xy=42(x+y)-16xy$$

$$cx^5+dy^5=42\cdot(-14)-16\cdot(-38)=20$$

4、從 1 到 200 這 200 個自然數中，取出 n 個數，使取出的任何兩個數的和都不等於 n，則 n 的最大可能值為何？

Sol:

取 $n=1$，從 $S=\{1,2,3,\ldots,200\}$，取 200 一個數

取 $n=2$，從 $S=\{1,2,3,\ldots,200\}$，取 200 ,199 兩個數

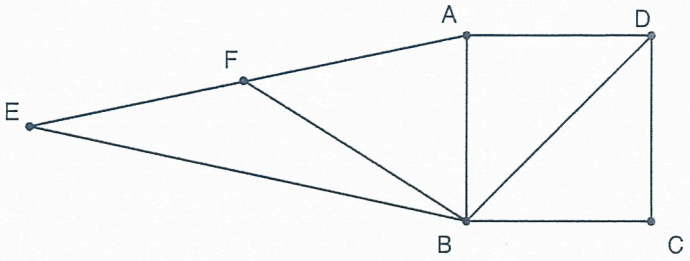
$$\vdots$$

取 $n=$ 134，從 $S=\{1,2,3,\ldots,200\}$，取200,199,…,67 共 134 個數，都滿足任何兩個數之和都不等於 n ，但 $n=135$ 卻不能滿足上述條件

故 n 的最大可能值為 134

5、設 ΔABE 在正方形 $ABCD$ 的外側，$AE=BE$；若 F 在線段 AE 上，且 $EF=AB$，$BF=BD$，試証：$\angle AEB=\frac{\pi}{7}$。

Sol:



設 $\overline{AB}=\overline{EF}=1$，則 $\overline{BF}=\sqrt{2}$

令 $\angle AEB=2x, \overline{BZ}=l$

由餘弦定理可得

$\overline{BF}^2=2=1+l^2-2l\cos 2x\cdots\cdots$ ①

由等腰三角形 AEB 可得

$\sin x=\frac{\frac{1}{2}}{l}\Rightarrow 2l\sin x=1\cdots\cdots$ ②

由①、②消去 l 可得 $2=1+\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1-2\sin^2 x}{\sin x}$

即 $8\sin^3 x-4\sin^2 x-4\sin x+1=0$

化成 $(\sin x+1)(8\sin^3 x-4\sin^2 x-4\sin x+1)=0$

可得 $(8\sin^4 x-8\sin^2 x+1)-(3\sin x-4\sin^3 x)=0$

即 $(1-8\sin^2 x\cos^2 x)-\sin 3x=(1-2\sin^2 2x)-\sin 3x=\cos 4x-\sin 3x=0$

從而化為 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\sin 3x$

在等腰三角形 AEB 中，由於 $\overline{AB}<\overline{AE}\Rightarrow 2x<\frac{\pi}{3}$，而得 $3x$ 為銳角

又由 $x>0$ 及 $2x<\frac{\pi}{3}$，可得 $-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}-4x<\frac{\pi}{2}$ 可知 $\frac{\pi}{2}-4x$ 亦為銳角

於是 $\frac{\pi}{2}-4x=3x$

故 $\angle AEB=2x=\frac{\pi}{7}$

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高屏區）　筆試(二)

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由

作答時間一小時

1、實數 x,y,z 滿足方程組 $\begin{cases} x+y+z=-3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{3} \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \end{cases}$，求 $x^2+y^2+z^2=?$

2、試求49除 $6^{98}+8^{98}$ 的餘數。

3、設 $\vec{a}=<x,2>,\vec{b}=<\sqrt{3},y>$; 其中 x,y 皆為實數，若 $x^2+y^2=7$，

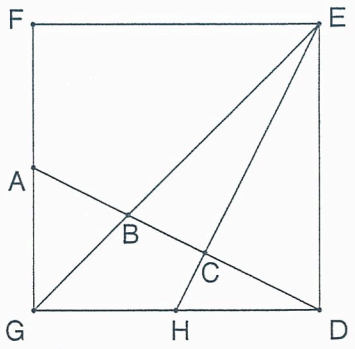
試求：$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最大值。

4、已知 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 和 $g(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

滿足 $f(-1)<g(-1)$，$f(0)>g(0)$，$f(1)<g(1)$，$f(2)>g(2)$。

試證：$2(p-a)+(b-q)+(c-r)+(s-d)>0$

5. 如圖，$DEFG$ 為正方形，A、H 分別是 $\overline{FG}$、$\overline{GD}$ 的中點，$\overline{DA}$ 分別與 $\overline{GE}$、$\overline{HE}$ 相交於點 B、C，求 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}$ 之比值。



6. 在△ABC 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=9$，過△ABC 的內心 I 作 $\overline{DE}//\overline{BC}$，分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於點 D、E，試求 $\overline{DE}$ 之長。

94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高屏區）　筆試(二)試題【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由

作答時間一小時

1、實數 x, y, z 滿足方程組 $\begin{cases} x+y+z=-3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{3} \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \end{cases}$，求 $x^2+y^2+z^2=?$

Sol:

$$\begin{cases} x+y+z=-3 & (1) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{3} & (2) \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 & (3) \end{cases}$$

由第(2)式得　$yz+xz+xy=-\frac{1}{3}xyz$

由第(3)式得　$(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz=-24$

所以 $xyz=12$

$yz+xz+xy=-4$

因此根據根與係數之關係可得 $t^3+3t^2-4t-12=0$

$(t-2)(t+2)(t+3)=0$，所以 $x^2+y^2+z^2=17$

2、試求49除 $6^{98}+8^{98}$ 的餘數。

Sol:

由 $6^{98}+8^{98}=(7-1)^{98}+(7+1)^{98}$

$$=\left(7^{98}-C_1^{98}\times 7^{97}\times 1+\cdots+C_{97}^{98}\times 7^1\times 1^{97}+1\right)+$$
$$\left(7^{98}+C_1^{98}\times 7^{97}\times 1+\cdots+C_{97}^{98}\times 7^1\times 1^{97}+1\right)$$
$$=49\times Q+2$$

故餘數為 2

3、設$\vec{a}=<x,2>,\vec{b}=<\sqrt{3},y>$;其中$x,y$皆為實數，若$x^2+y^2=7$，

試求：$\vec{a}\cdot\vec{b}$之最大值。

Sol:

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}x+2y$，由$\left(\sqrt{3}x+2y\right)^2\le(3+4)\left(x^2+y^2\right)=7^2$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}\le 7$

4、已知$f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$和$g(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

滿足 $f(-1)<g(-1)$，$f(0)>g(0)$，$f(1)<g(1)$，$f(2)>g(2)$。

試證：$2(p-a)+(b-q)+(c-r)+(s-d)>0$

Sol:

令 $k(x)=f(x)-g(x)=(p-a)x^3+(q-b)x^2+(r-c)x+(s-d)$

$k(-1)<0$，$k(0)>0$，$k(1)<0$，$k(2)>0$

所以有三根分別介於 (-1, 0), (0, 1), (1, 2) 區間

令此三根性質分別為$-1<a<0$，$0<b<1$，$1<c<2$

則$0<a+b+c<3$，$-3<ab+ac+bc<2$，$-2<abc<0$

即$0<\dfrac{b-q}{p-a}<3$，$-3<\dfrac{r-c}{p-a}<2$，$-2<\dfrac{d-s}{p-a}<0$

$0<\dfrac{b-q}{p-a}+2+\dfrac{c-r}{p-a}+\dfrac{s-d}{p-a}<10$,

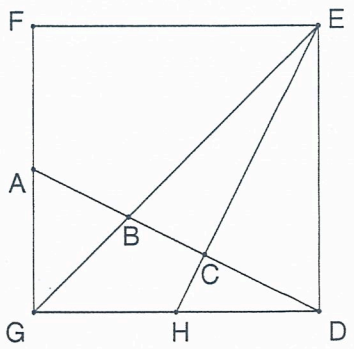
因為 $k(0)>0$，所以 $s>d$，即$p>a$

因此 $2(p-a)+(b-q)+(c-r)+(s-d)>0$

5. 如圖，$DEFG$為正方形，A、H分別是$\overline{FG}$、$\overline{GD}$的中點，$\overline{DA}$分別與$\overline{GE}$、$\overline{HE}$

相交於點B、C，求$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}$之比值。

Sol:



由$\overline{AG}:\overline{ED}=1:2$ 得$\overline{GB}:\overline{BE}=1:2$及$\overline{AB}:\overline{BD}=1:2$

又$\overline{GH}:\overline{HD}=1:1$

利用孟式定理：$\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HG}}\cdot\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EB}}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=1$

$\Rightarrow\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=1$

得$\overline{BC}:\overline{CD}=2:3$ $\therefore\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=5:4:6$

6. 在△ABC 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=9$，過△ABC 的內心 I 作 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於點 D、E，試求 $\overline{DE}$ 之長。

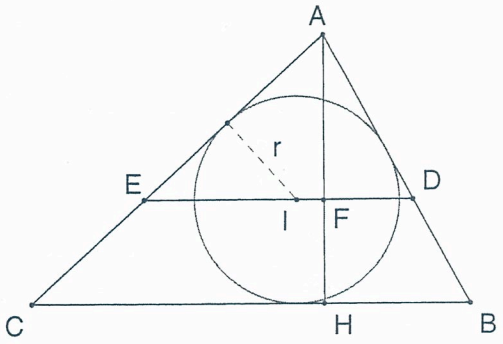
Sol:

設內切圓半徑為 r，s 為三邊長和之半，即 $s=\frac{1}{2}(7+8+9)=12$

取 $\overline{AH}$ 為△ABC 在 $\overline{BC}$ 邊的高，F 為 $\overline{AH}$ 和 $\overline{DE}$ 之交點

由海龍公式：$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}$周長$\times r$

即 $\Delta ABC=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=12r$



而得 $12\sqrt{5}=12r\therefore r=\sqrt{5}$

又 $\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\overline{AH}=12\sqrt{5}$

得 $\overline{AH}=3\sqrt{5}$

$\overline{AF}:\overline{AH}=\left(3\sqrt{5}-\sqrt{5}\right):3\sqrt{5}=2:3$

由 $\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{AH}$

得 $\overline{DE}=\overline{BC}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}}=8\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$

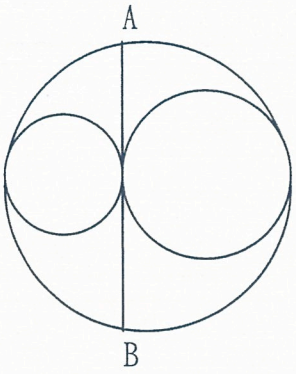
故 $\overline{DE}$ 之長為 $\frac{16}{3}$

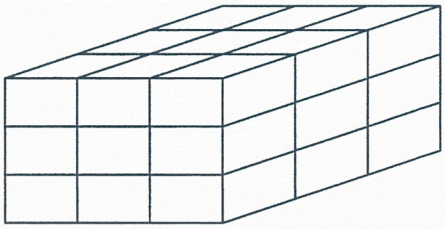
玖、專題探討摘要(一)

高中組合數學

朱亮儒

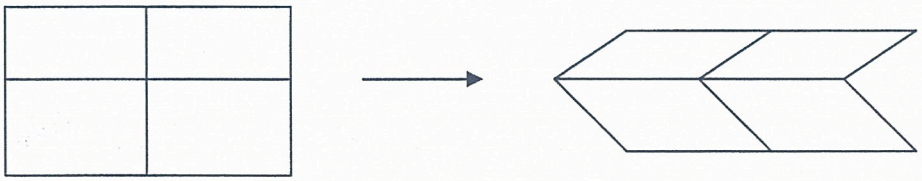
數學模式的形成是以數學語句為基礎，來建立數學的基本性質；這種數學性質在沒有證實之前往往是以一種或真或假的敘述方式所描述出來的，我們稱之為一個「數學命題」。當一個問題出現時，我們首要考慮的是其對應的數學命題是否正確？是否有解？也就是解的存在性問題。當解存在時，我們更想進一步瞭解是否是唯一的解或有更多不同的解;同時，我們也會希望知道在某些限制的條件下哪一個解是最佳的解。數學的心臟就是數學的問題（mathematical problem）和解法(solving)，如何掌握正確的思維(thinking)方法、尋求正確的解題途徑、提高數學解題的能力，是當前數學學習中重要的課題. 舉例來說，假設有一造型特殊的湖(如左下圖中，大圓內且在兩小圓外的區域)，已知大圓與兩小圓內切，而兩小圓互相外切，且僅測得弦 $\overline{AB}=10$ 公分，那麼這特殊湖的面積是多少呢？



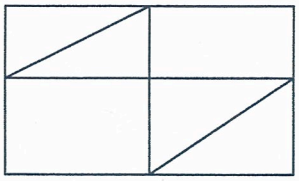


又如：有一正立方體的迷宮(如右上圖中，等分成 27 個小正方體)，若從某一小正方體開始移動，每次可移至有一面相鄰的另一小正方體中，那麼依此規律是否可以走完這全部的 27 個小正方體而不重複走過的小正方體呢？

再想一想看，用骨架做成的四面體和長方體框框，哪一種比較堅固且壓縮不易變形呢？當然是四面體，因為它的每一個面都是三角形，三邊長度固定的三角形只有一種，三角形的形狀不變，四面體就不易變形。反觀長方體就容易被壓縮而變形，例如，左下圖可被擠壓而變形成右下圖(各邊長度仍保持不變)：



因此，蓋長方體的房子就需要有其它固定的骨架或牆壁來維繫，才能使房屋不易受到擠壓而變形。例如，我們可增加兩條骨架(如下圖中的兩斜線條)，則可使之成為牢固的形體而不易變形：



有效的解決數學問題，除了解題流程圖的建立之外，還需要數學知識的學習與提昇；更重要的是：如何活用或轉換已知的數學知識以解決問題。有時候一道數學問題表面上看來是代數題，但若能作適當的轉換成幾何圖形問題，或許我們可以更容易解出答案；例如十八世紀著名的康城七橋問題，經由尤拉(Euler)轉換成圖形學的語言後，就能輕而易舉的解決問題；再請看看以下的例子:

【例題】已知 p, q, r 是 0 與 1 之間的數，試證：1-pq-qr-rp+2pqr > 0。

為證明此不等式，我們可考慮 r 為一變數，並令 f(x) =1-pq- (p+q-2pq)x，則 f(0) = 1-pq > 0 且 f(1) = 1-p-q+pq = (1-p)(1-q) > 0；由此可得證 f(r) > 0。這種證法是利用直線的線性性質來證明這不等式；同樣的，我們也可以用凸函數的凸性來解決一些相關的題型，即當凸函數 y=f(x) 滿足 f(s) < 0 且 f(t) < 0，則對 s 與 t 之間的每一個實數 x，都有 f(x) < 0。事實上，利用大家熟悉的不等式：

1-(p+q-pq) = (1-p)(1-q) > 0，

我們也可以用代數的方法解出上面的不等式:

1-(pq+qr+rp-2pqr) = (1-pq-r+pqr) + r(1-p-q+pq)
= (1-pq)(1-r)+r(1-p)(1-q) > 0。

這種技巧是 Polya 特殊化的解題方法。同樣的，我們也可以透過 Hilbert 一般化的解題方法，利用數學歸納法來證明一般化的不等式: 設 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都是 0 與 1 之間的數, 則

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{p_k}+(n-1)p_1 p_2 \cdots p_n > 0 \text{ 。}$$

用適當的符號來表示數學語句既是重要且又有效益的，尤其是函數的表示。設 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$，若 $f: X \to X$ 是一對一且映成的函數，則稱 f 為排列或置換(permutation)。若以 S_n 表示所有這樣的排列所成的集合，則以合成「。」作為運算時，$(S_n, \circ)$ 就形成一個群，稱為對稱群(symmetric group)。關於對稱群 S_n，我們知道：$|S_n| = n!$，而對 $f \in S_n$，若 $f(k)=a_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$，則我們可以將 f 表成

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n\\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n\end{pmatrix}。$$

特別地，當 $f(a_{k-1})=a_k$ （$k=2,3,\cdots,n$） 而 $f(a_n)=a_1$ 時，則稱 f 是一個循環圈(cycle), 可記為 $f=(a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots\ a_n)$。例如 ： 若

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

則 $f=(1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6)$。更進一步的，

$f^2=f\circ f=(1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4)$， $f^3=f\circ f\circ f=(1\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$

$f^4=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$， $f^5=(1\ 4\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5)$

$f^6=(1\ 6\ 4\ 2\ 7\ 5\ 3)$， $f^7=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$

即 $$f^7=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

這表示長度 7 的循環圈經過七次的合成運算後會回到原來的排列順序。一般而言，長度 n 的循環圈經過 n 次的合成運算後也會回到原來的排列順序。更一般性的，每一個排列都可表成若干個相異互斥的循環圈之積(合成)；例如：若

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5\end{pmatrix},$$

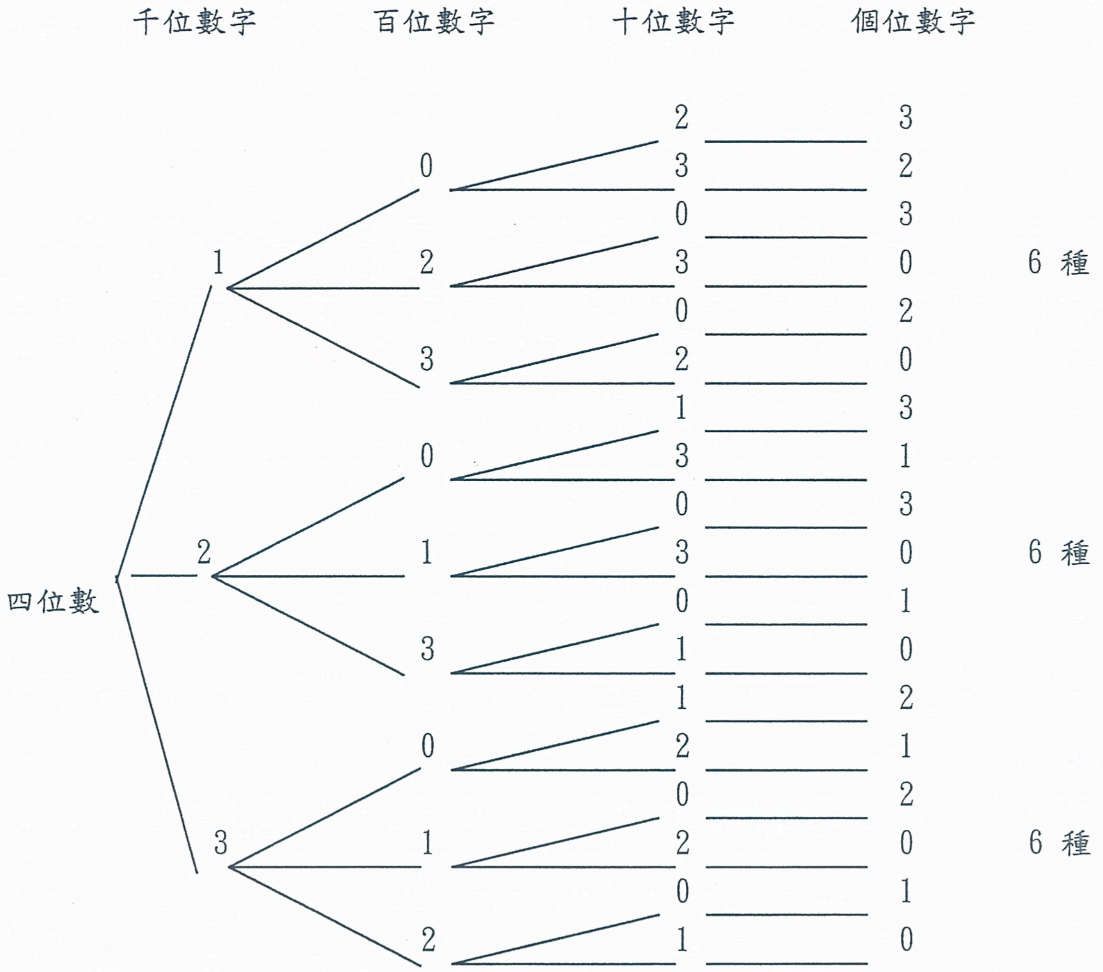
則 $f=(1\ 3\ 4\ 6)\circ(2)\circ(5\ 7)$。像這樣的排列 f ，需要經過幾次的合成運算後，

才會回到原來的排列順序呢？這就是以下的「排隊問題」:

【排隊問題】設有 n 個人由左而右排成一列，若每次重新排隊時，第二個人排到第一個人之前，第三個人排到第一個人之後，第四個人排到第二個人之前，第五個人排到第三個人之後，依此順序排列直到最後一人排完為止，我們稱為「一次排隊」。問經過幾次排隊後，是否這 n 個人又可排成原來的次序？如果可以排回原來的次序，那麼最少需要幾次的排隊呢？

由數學發展來看，人類從認識自然數後，遇到問題總會按其限制的條件，把討論的對象作適當的安排或列舉出可能的搭配方式。例如：某醫院急診室有三位醫生及八位護士，如果每天晚上需要一位醫生及三位護士值班，那麼一星期的輪值表有幾種不同的編排方式呢？這種編排的問題必須考慮其選取的方法，也要顧及排列的次序；這類問題就是組合數學中的計數問題。就計數而言，排列與組合是最常見的基本問題，也是研究計算機科學的基礎。

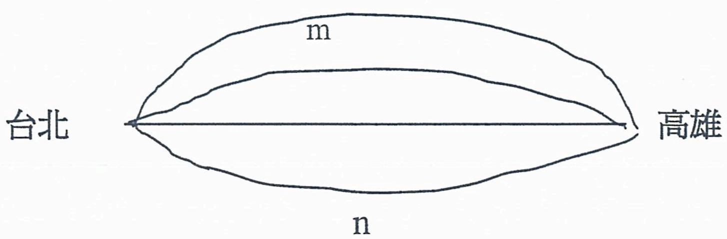
分類討論的方式是一種直接分析問題可能產生各種情況最簡易的方式，例如：考慮用 0、1、2、3 排成四位數時，我們可依千位數字為 1 或 2 或 3 分成三類，再分析各類可排出的四位數，樹狀圖是最常用來解決問題的表示方式，其分布如下：



這三類各有 $3\times2\times1=6$ 種，因此，不同的四位數共有 $6+6+6=18$ 種。這樣的計數問題隱含著基本的計數原理:「加法原理」與「乘法原理」，我們分別描述如下：

【加法原理】設解決一件問題的方式有兩種方式 A 與 B，已知方式 A 可提供 m 種不同的方法，而方式 B 可提供 n 種不同的方法來解決問題，且這些方法都不重複；則用方式 A 或方式 B 來解決問題時，共有 $m+n$ 種方法。

例如：搭火車從台北到高雄，若自強號的班次有 m 種，而莒光號的班次有 n 種，則搭自強號或莒光號的火車從台北到高雄的班次，共有 $m+n$ 種。



以集合的概念發展來看，若 A,B 為兩互斥的集合，即 $A\cap B=\Phi$，則

$$|A\cup B|=|A|+|B|。$$

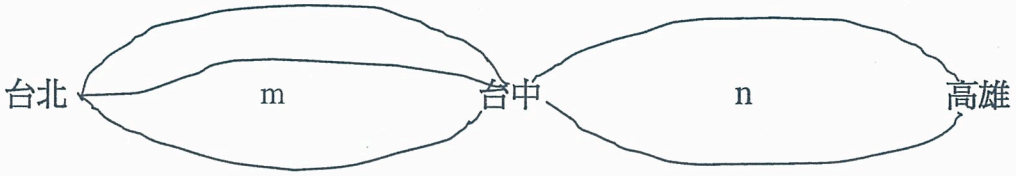
一般而言，對任意的兩集合 A,B，都有 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。這就是所謂的排容原理。對集合 X 中的三個子集合 A,B,C，我們有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$$

那麼，$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$ 又是什麼呢？

【乘法原理】設解決一件問題的方式可拆成前後兩個步驟 A 與 B，已知步驟 A 可提供 m 種不同的方法，而步驟 B 可提供 n 種不同的方法來解決問題；則結合步驟 A 與步驟 B 來解決問題時，共有 $m\times n$ 種方法。

例如：搭自強號火車從台北到高雄，但在台中必須停留一天，若台北到台中的自強號班次有 m 種，而台中到高雄的自強號班次有 n 種，則搭自強號的火車從台北經台中停留後再到高雄的班次，共有 $m\times n$ 種不同的組合。

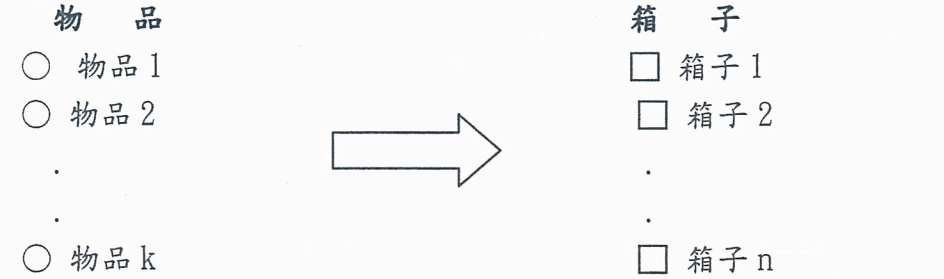


以集合的概念來看，對任意的兩集合 A,B，其積集合以 $A\times B$ 表示，即

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}。$$

若 $|A|=m$、$|B|=n$，則 $|A\times B|=|A|\times|B|=m\times n$。一般而言，若 $|A_k|=a_k$，則 $|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$。

【四種不同型態的排列組合】將 k 件物品放入 n 個箱子(位置)，我們依據物品的相同或相異及箱子是相同或相異，分成以下四種不同型態的排列組合：



甲、k 件相異物放入 n 個相異的箱子

一、每個箱子最多放入一件物品

當 $n \geq k$ 時，此問題相當於：從 n 個相異的目標取出其中的 k 個之排列問題。依乘法原理：排法有 $P_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 種（直線排列）。

二、每個箱子最少放入一件物品

當 $k \geq n$ 時，此問題相當於：將 k 件相異物分成 n 堆，每堆至少一件後再排成一列的問題。依乘法原理可得：排法有 $S_2(k,n)\times n!$ 種，其中 $S_2(k,n)$ 表示第二類 Stirling 數：將集合 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 分成 n 個非空子集的方法數。

三、沒有任何限制

這 k 件相異物都有 n 個可供放置的位置，依乘法原理：排法有 $n\times n\times n\times\cdots\times n = n^k$ 種（重複排列）。

乙、 k 件相同物放入 n 個相異的箱子

一、每個箱子最多放入一件物品

當 $n \geq k$ 時，此問題相當於：從 n 個相異的目標取出其中的 k 個之組合問題。依乘法原理可得 $P_k^n = C_k^n \times k!$；因此，取法有

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ 種（組合數）。

二、每個箱子最少放入一件物品

當 $k \geq n$ 時，此問題相當於：先從 k 件相同物中取出 n 件並分給每箱一件，再將剩下的 $k-n$ 件相同物沒有任何限制的放入 n 個箱子中的問題。依乘法原理：排法有 $1\times H_{k-n}^n = C_{k-n}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$ 種。

三、沒有任何限制

相當於從 n 個相異的目標物可重複取出其中的 k 個之組合。其排法有 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 種（重複組合）。

丙、 k 件相異物放入 n 個相同的箱子

一、每個箱子最多放入一件物品

當 $n \geq k$ 時，排法恰有 1 種。

二、每個箱子最少放入一件物品

當 $k \geq n$ 時，此問題相當於：將 k 件相異物分成 n 堆，每堆至少一件的問題。排法有 $S_2(k,n)$ 種。

三、沒有任何限制

此問題相當於：將 k 件相異物分成 1 堆或 2 堆或…，或 n 堆，每堆至少一件的問題。依加法原理：排法有

$B(k,n) = S_2(k,1) + S_2(k,2) + \cdots + S_2(k,n)$ 種，其中 $B(k,n)$ 稱為 Bell 數。

丁、 k 件相同物放入 n 個相同的箱子

一、每個箱子最多放入一件物品

當 $n \geq k$ 時，排法恰有 1 種。

二、每個箱子最少放入一件物品

當 $k \geq n$ 時，此問題相當於：將 k 件相同物分成 n 堆，每堆至少一件的問題。排法有 $P(k,n)$ 種，其中 $P(k,n)$ 表示將正整數 k 分拆成 n 個部分的方法數。

三、沒有任何限制

此問題相當於：將 k 件相同物分成 1 堆或 2 堆或…. 或 n 堆，每堆至少一件的問題。依加法原理：排法有 $P(k,1) + P(k,2) + \cdots + P(k,n)$ 種。

【範例一】數列問題

滿足以下各條件的數列 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 各有幾種？其中每一項 $a_i \in \{1,2,\cdots,n\}$。

1. 沒有限制
2. 兩兩相異（即 $i \neq j$ 時，$a_i \neq a_j$）
3. $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$
4. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$
5. Kaplansky 問題

【範例二】函數問題

滿足以下各條件的函數 $f : A \to B$ 各有幾種？其中 $|A| = k, |B| = n$。

1. 沒有限制
2. f 是一對一，且 $n \geq k$
3. f 是一對一且映成，且 $k = n$
4. 配對問題

【範例三】方程式問題

滿足方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 及以下各條件的整數解各有幾組？

1. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是非負整數
2. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正整數
3. 正整數的分拆問題

【範例四】子集合問題

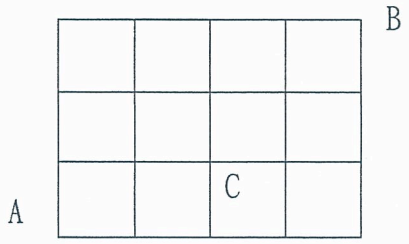
設集合 A 有 n 個元素，且 $a,b\in A$，則滿足以下各條件 A 的子集 B 各有幾個？

1. 沒有限制
2. $a,b\in B$
3. $a\in B,b\notin B$
4. $a,b\notin B$
5. 排容問題
6. 集合的分割問題

【範例五】道路捷徑問題

設一街道圖中，有 $n+1$ 條平行的橫街與 $m+1$ 條平行的直街，則由左下角 A 走到右上角 B 的捷徑，滿足以下各條件的捷徑各有幾條？

1. 沒有限制
2. 必須通過其中一交點 C
3. 不通過其中一交點 C
4. 不通過其中一塊區域
5. Catalan 捷徑問題



玖、專題探討摘要(二)

一些幾何圖形中的最大值與最小值

李正

在這演講中，我們的主題是要決定內接（外接）於圓的 n 邊形中那一種具有最大（最小）面積與周長，處理這類問題的最簡單的方法之一(不涉及微積分)是估算圓心角所構成的三角函數和，即三角函數和的不等式。

1、一些sin函數的不等式

定理 1.1：設α與β爲滿足條件$0\le\alpha\le180^0$，$0\le\beta\le180^0$的角度，那麼

$$\sin\alpha+\sin\beta\le2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

且等號成立$\Leftrightarrow\alpha=\beta$。

證明：利用和差化積得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

又因爲$-180^0\le\alpha-\beta\le180^0$，$0\le\alpha+\beta\le360^0$，所以

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ge0\ ,\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ge0\ ,$$

因此 $$\sin\alpha+\sin\beta\le2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

而且 $$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1\Leftrightarrow\alpha=\beta\ 。$$ #

接下來，我們將定理 1.1 推至 n 個角 n 項和的情況。

定理 1.2：設α_1，α_2，…，α_n表示 n 個角且滿足條件：

對$j=1$，2，…，n 而言$0\le\alpha_j\le180^0$，

那麼

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+...+\sin\alpha_n\le n\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_n}{n}\right)$$

且等號成立$\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$。

證明：顯然，若$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$，則上面的不等式中的等號成立，所以我們設這些角的角度不全相等，並証明在此情形下上面的不等式中只有不等號成立。我們採取的方法是一種特別的數學歸納法：

設 P_n 表示下列命題：若角 α_1 ，α_2 ，…，α_n 不全相等且滿足上述條件，則上面的不等式只有不等號成立。

由定理 1.1 知 P_2 成立，現在要証當 $n \geq 3$ 時 P_n 也成立，証明分爲兩步驟：

(1) 若某 $P_n\,(n \geq 3)$ 成立，則 P_{n-1} 也成立。
(2) 若某 $P_n\,(n \geq 2)$ 成立，則 P_{2n} 也成立。

不難看出，若(1)、(2)皆証得，則對所有 $n \geq 2$ 而言， P_n 皆成立。

(1) $P_n \Rightarrow P_{n-1}$

設 α_1 ，α_2 ，…，α_{n-1} 表示(n-1)個不全相等的任意角且

$0 \leq \alpha_j \leq 180^0\,(j = 1，2，\cdots，\text{n-1})$。

令
$$\alpha_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1}$$

注意到

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = n\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1}$$

所以

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n}{n} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1} = \alpha_n$$

因此對於這 n 個角 α_1 ，α_2 ，…，α_n 而言， P_n 可推出

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{n-1} + \sin\alpha_n < n\sin\alpha_n$$

減 $\sin\alpha_n$ 得

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{n-1} < (n-1)\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n}$$

於是 P_{n-1} 成立。

(2) $P_n \Rightarrow P_{2n}$

設 α_1 ，α_2 ，…，α_{2n} 表示 2n 個不全相等的任意角並且

$0 \leq \alpha_j \leq 180^0\,(j = 1，2，\cdots，\text{2n})$。

藉著重新安排符號我們可假設 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ，現在將 P_n 成立的結果分別應用到 α_1 ，α_2 ，…，α_n 與 α_{n+1} ，…，α_{2n} ，那麼得

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n < n\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \qquad ①$$

與

$$\sin\alpha_{n+1}+\sin\alpha_{n+2}+\ldots+\sin\alpha_{2n}\le n\sin\frac{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n}}{n}\quad②$$

上面最後一式中是 ≤，因爲有可能$\alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\ldots=\alpha_{2n}$。

定義

$$\alpha=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\ ,$$

$$\beta=\frac{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n}}{n}\ ,$$

那麼不難看出 $0\le\alpha,\beta\le180^0$ 與 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{2n}$

再來由①+②得

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{2n}<n\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)$$

但由P_2得

$$\sin\alpha+\sin\beta\le2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

所以 $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{2n}<2n\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n}}{2n}$ #

例題：α,β,γ表示一三角形的三內角，那麼請問$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$的最大值與最小值爲何？

解：首先，直接由定理 1.2 可得

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\quad③$$

$$=3\sin60^0=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

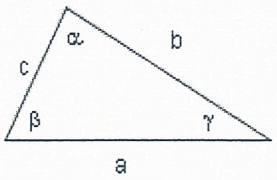
所以達到最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$ 此三角形是正三角形。

另一方面，我們不難看出此和無最小值：

對任一之三角形而言，$\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$皆是正實數，但當取$\alpha$，$\beta$極接近 0 度，而$\gamma=180^0-\alpha-\beta$極接近 180 度時$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$非常靠近 0，但不等於 0，因此此和無最小值。 #

另外，由不等式③可延伸出一些關於三角形的不等式：我們進一步設上述三角形的三邊長爲 a，b，c 及面積 A，那麼

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ca\sin\beta$$



將上面的式子改寫成

$$\sin\gamma=\frac{2A}{ab}\ ,\ \sin\alpha=\frac{2A}{bc}\ ,\ \sin\beta=\frac{2A}{ca}$$

並代入③中且經代數轉換後得

$$A\le\frac{3\sqrt{3}abc}{4(a+b+c)}$$

再來由海龍公式替換上列的 A 得

$$s(s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{27(abc)^2}{16(a+b+c)^2}$$

兩邊乘上 $16(a+b+c)^2$ 並且將 s 寫成 $\frac{a+b+c}{2}$ 得

$$(a+b+c)^3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le 27(abc)^2$$

但 $27(abc)\le(a+b+c)^3$ (算術—幾何不等式)

所以

$$27abc(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le 27(abc)^2$$

最後得

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc \qquad ④$$

我們証得當 a，b，c 表示三角形三邊邊長時，我們有不等式④，但 a，b，c 不是三邊邊長時，例如 a=3，b=4，c=8，不等式④是否成立呢？

成立!! 因爲此時式④左邊是≤0，因此，對所有正數 a，b，c 而言，不等式④恆成立，而且等號成立 $\Leftrightarrow a=b=c$。

事實上，其它的三角函數也有定理 1.1 及 1.2 的類似結果，但不等號有可能是反方向的，這是下兩節的主題，不過我們先將在較廣的情境中討論它們。

2、Jensen 不等式

在第 1 節的結果定理 1.2 於更一般的情境中仍然是對的。

定理 2.1：設函數 f(x)有下列性質：對 f 的定義域中的任意兩數 α,β 而言

$$f(\alpha)+f(\beta)\le(\text{或}\ge)2f(\frac{\alpha+\beta}{2})\ ,$$

其中 f 的定義域是實數軸或實數軸上的一區間，而且上式等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ ，那麼

對 f 的定義域中的任意數 α_1 ， α_2 ，…， α_n 而言，我們有

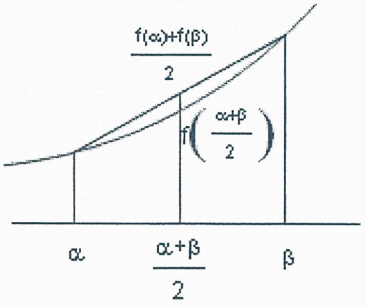
$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_n)\le(\text{或}\ge)nf(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n})$$

而且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$ 。

這定理的証明方法與定理 1.2 的証明方法完全一樣，只不過將 *sin* 函數改寫成函數 f，所以証明省略。

若一函數 f 滿足條件：對在 f 的定義域中的任意兩數 α,β ，

$f(\alpha)+f(\beta)\ge 2f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ ，則我們稱 f 爲凸函數。



在凸函數的情形，事實上，定理 2.1 是一更廣不等式的特殊情形，而此一不等式被稱作 Jensen 不等式。另外，有趣的是定理 2.1 中的函數和若改成乘積，則類似的結果仍成立。

定理 2.2：設函數 f(x)有下列性質：

對 f 的定義域中的任意兩數 α,β 而言，

$$f(\alpha)f(\beta)\ge(\text{或}\le)\left[f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]^2$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ ，其中 f 的定義域是實數軸或實數軸上的區間，另設 f(x)>0，那麼

$$f(\alpha_1)f(\alpha_2)...f(\alpha_n)\ge(\text{或}\le)[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n})]^n$$

而且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$ 。

証明：(部分)

事實上，此定理的証明方法與定理 1.2 的証明方法也是類似的，所以

在此我們只証明 n=3 與 n=4 的情形，爲了証 n=3 我們須先証 n=4。
設 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 爲 f 定義域中的任意四數。
若 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4$ ，則顯然

$$f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3)f(\alpha_4)=\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4})\right]^4$$

現在假設 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 不全相等，例如 $\alpha_1\neq\alpha_2$ ，那麼由假設知

$$f(\alpha_1)f(\alpha_2)>\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\right]^2 \quad 且 \quad f(\alpha_3)f(\alpha_4)\geq\left[f(\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2})\right]^2$$

兩式相乘得

$$f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3)f(\alpha_4)>\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})f(\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2})\right]^2$$

又

$$\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})f(\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2})\right]^2\geq\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4})\right]^4$$

所以

$$f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3)f(\alpha_4)>\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4})\right]^4$$

n=4 得証。

對於 n=3 的情形，我們設 α,β,γ 爲 f 定義域中的任意三數，同樣地，當 $\alpha=\beta=\gamma$ 時，原式等號成立，我們証當 α,β,γ 不全相等時，

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)>\left[f(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})\right]^3$$

設 $\delta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ ，當然 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 還是不全相等，而且

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

所以由 n=4 的情形得

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)f(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})>\left[f(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})\right]^4$$

因此

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)>\left[f(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})\right]^3$$

#

另一証法：利用 log 函數

$$f(\alpha)f(\beta)\geq\left[f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]^2$$

$$\Rightarrow \log f(\alpha)+\log f(\beta)\geq 2\log f(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

由定理 2.1 得

$$\log f(\alpha_1)+\log f(\alpha_2)+\ldots+\log f(\alpha_n)\geq n\log f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n})$$

所以 $$f(\alpha_1)f(\alpha_2)\ldots f(\alpha_n)\geq\left[f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n})\right]^n$$ #

爲了使定理 2.2 能應用於三角函數，須先証明 n=2 的情形：

(1) sin 函數

設 $0\leq\alpha,\beta\leq 180^0$ ，那麼 $$\sin\alpha\sin\beta\leq\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ 。

証明：

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2}\quad\text{(半角公式)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2}+\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{2}$$

$$\geq\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

最後的不等式成立是因爲

$$\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{2}\geq\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\geq\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{2}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}\ ,$$

其中等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$

(注意到設立限制條件 $0\leq\alpha,\beta\leq 180^0$ 是爲了得到等號成立的充要條件 $\alpha=\beta$)

因此由定理 2.2 得

若 $0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq 180^0$ 則 $$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leq\left[\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right]^3$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$

(2) tan 函數

當 $0 \le \alpha, \beta < 90^0$ 時，那麼

① $0 < \alpha + \beta < 90^0 \Rightarrow \tan\alpha \tan\beta \le \tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$

② $\alpha + \beta > 90^0 \Rightarrow \tan\alpha \tan\beta \ge \tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$

③ $\alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow \tan\alpha \tan\beta = \tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$

④ 除了③的情形 $\tan\alpha \tan\beta = \tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

證明：利用半角公式展開 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$，然後將兩邊轉換成 $\sin\alpha, \cos\beta$ 等，最後交叉相乘便可証得上述式子。

3、其它三角函數和的不等式

我們將仿照上一節的方式來進行討論，就是先考慮 n=2 的情形，然後再利用定理 2.1 推廣至一般的情形。

在第 1 節中我們已證得　　$\sin\alpha + \sin\beta \le 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$

利用下列的**算術平均—調和平均不等式**可將 sin 函數和不等式推伸至其它三角函數和不等式。

算術平均—調和平均不等式：

對正數 a，b 而言

$$\frac{a+b}{2} \ge \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \right)^{-1}$$

或　$a+b \ge \frac{4ab}{a+b}$

且等號成立 $\Leftrightarrow a = b$，其中 $\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \right)^{-1}$ 被稱作 a 與 b 的調和平均

現在將上面的 a，b 分別用 $\sin\alpha$ 與 $\sin\beta$ 來替代，得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \sin\alpha + \sin\beta \ge \frac{4\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$$，其中 $0 < \alpha, \beta < 180^0$

不看中間項，並取其它兩項的倒數，得

$$\csc\alpha+\csc\beta\geq\csc\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ①$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ ，其中 $0<\alpha,\beta<180^0$ 。

再來，當 $-90^0\leq\alpha,\beta\leq 90^0$ 時

$$\cos\alpha+\cos\beta\leq 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ②$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ 。

這不等式可直接由定理 1.1 以 $90^\circ-\alpha$ ，$90^\circ-\beta$ 分別替代 α,β 而獲得，這是因爲 $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ ，並注意到 $0\leq 90^\circ-\alpha\leq 180^\circ \Leftrightarrow -90^\circ\leq\alpha\leq 90^\circ$

同樣地，$90^\circ-\alpha$ ，$90^\circ-\beta$ 分別替代不等式①中 α,β 得

$$\sec\alpha+\sec\beta\geq 2\sec\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ③$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ ，其中 $-90^0<\alpha,\beta<90^0$ 。

接下來，我們來看看 tan 函數與 cot 函數的情形。
首先，我們証明

$$\tan\alpha+\tan\alpha\geq 2\tan\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ④$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ ，其中 $0\leq\alpha,\beta<90^\circ$ 。

如果 $\alpha=\beta$ ，那麼式④中的等號成立，如假設 $\alpha>\beta$ ，証明上式④只有不等式成立。

$$令\quad \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,$$

那麼

$$\alpha-\gamma=\gamma-\beta\ ,\ \sin(\alpha-\gamma)=\sin(\gamma-\beta)$$

再由和角公式可得

$$\sin\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\cos\alpha=\sin\gamma\cos\beta-\sin\beta\cos\gamma \qquad ⑤$$

又因 $\alpha>\beta$ ，所以 $\cos\alpha<\cos\beta$ ，因此

$$(\cos\alpha\cos\gamma)^{-1}>(\cos\beta\cos\gamma)^{-1} \qquad ⑥$$

將⑤與⑥相乘得

$$\tan\alpha-\tan\gamma>\tan\gamma-\tan\beta$$

或 $\tan\alpha+\tan\beta>2\tan\gamma$

不等式④得証。

最後，將④式後的 α,β 分別以 $90^\circ-\alpha$ ，$90^\circ-\beta$ 代入得

$$\cot\alpha+\cot\beta\geq 2\cot\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ⑦$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha=\beta$ ，其中 $0<\alpha,\beta\leq 90^\circ$ 。

基於上述不等式①、②、③、④與⑦，由定理 2.1 可推得。

定理 3.1：

$$(1)\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n\leq n\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \qquad ⑧$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$ ，其中 $-90^\circ\leq\alpha_j\leq 90^\circ\ (j=1,2,\ldots n)$ 。

$$(2)\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\ldots+\tan\alpha_n\geq n\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \qquad ⑨$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$ ，其中 $0\leq\alpha_j<90^\circ\ (j=1,2,\ldots n)$ 。

(3)函數 sec，csc 與 cot 皆有與⑨式類似的結果，其中這些函數中的 α 範圍分別與不等式③、①與⑦中的範圍一樣。

4、 內、外接於圓的多邊形

在這一節中，我們簡單地介紹下二節要討論的主題與其相關的等周長問題，前幾節中的三角函數不等式是探討這些主題的主要工具。

一多邊形內接於一圓的意思是此多邊形的每一個頂點都在圓上，而外接於一圓的多邊形指的是其每一邊皆切於圓。

在第 6 節，我們主要討論下列的問題：

(1) 在所有內接於一圓的 n 邊形中，那一型的 n 邊形具有最大面積及那一型 n 邊形具有最大周長？
(2) 在所有外接於一圓的 n 邊形中，那一型的 n 邊形具有最小面積及那一型 n 邊形具有最小周長？

在圓上簡單地繪出一些 n 邊形，不難看出問題(1)與(2)分別沒有最小與最大面積及周長的 n 邊形。

事實上，上面的二個問題與歷史上有名的等周長問題有密切的關係，所謂等周長問題(基本型)是指在具有相同周邊長(面積)的平面區域中，找出那一種區域擁有最大面積(最小周長)？

等周定理：對平面上任意區域而言，若其面積爲 A，周長爲 L，則

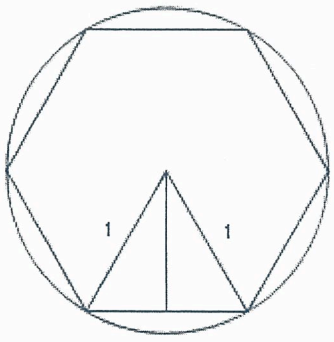
$$4\pi A \le L^2 \quad 或 \quad \frac{4\pi A}{L^2} \le 1 ,$$

且等號成立 $\Leftrightarrow$ 此區域是一圓盤。

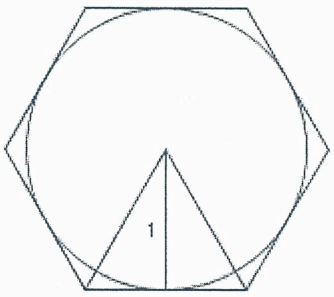
在等周定理中，$\frac{L^2}{4\pi}$ 指的是具有周長 L 的圓的面積，也就是說，具有等周長(等面積)的平面區域中，圓的面積最大(周長最小)。由此，我們可能會猜上面兩個問題的答案應該是正 n 邊形，事實上，確實如此，在第 6 節我們將給出証明。

在等周定理中的比 $\frac{4\pi A}{L^2}$ 被稱作**等周商**，在第 5 節，我們將比較正 n 邊形與正(n+1)邊形的等周商。另外，我們注意到**相似形具有相同的等周商**。

最後，我們來算一算內、外接於圓的正 n 邊形的面積與周長，以便在第 5 節及第 6 節中使用，因爲相似形具有相同的等周，所以可設圓爲半徑是 1 的單位圓。



(a)



(b)

設一內接於單位圓的正 n 邊形的面積與周長分別爲 A_n 與 L_n，那由上圖(a)不難算出

$$A_n = \frac{1}{2} n \sin\frac{360^\circ}{n} \ , \ L_n = 2n \sin\frac{180^\circ}{n} \qquad ①$$

再來，設一外接於單位圓的正邊形的面積與周長爲別爲 A'_n 與 L'_n，那麼由上圖(b)不難算出

$$A'_n = n \tan\frac{180^\circ}{n} \ , \ L'_n = 2n \tan\frac{180^\circ}{n} \qquad ②$$

5、正多邊形

定理 5.1：在正 n 邊形中，等周商會隨著 n 增大而增大，也就是說，具有周長爲 L 的正(n+1)邊形面積比具有相同周長 L 的正 n 邊形面積大，或具有面積爲 A 的正(n+1)邊形周長比具有相同面積 A 的正 n 邊形周長小。

證明：利用第 4 節中的公式②可計算出正 n 邊形的等周商：

$$\frac{4\pi A'_n}{\left(L'_n\right)^2}=\frac{4n\pi\tan\frac{\pi}{n}}{\left(2n\tan\frac{\pi}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{n\tan\frac{\pi}{n}}\ 。$$

證明此等周商會隨著 n 增大而增大等同於證明 $n\tan\frac{\pi}{n}$ 隨著 n 增大而減小，即證明

$$n\tan\frac{\pi}{n}>(n+1)\tan\frac{\pi}{n+1}(n\geq 3)$$

由定理 3.1 中的不等式⑨，其中取 $\alpha_1=0,\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n+1}=\frac{\pi}{n}$，得

$$\tan 0+n\tan\frac{\pi}{n}>(n+1)\tan\frac{\pi}{n+1}\qquad\#$$

定理 5.2：設 A_n 與 L_n 分別表示一內接於單位圓的正 n 邊形的面積與周長，那麼

$$A_n<A_{n+1}\ ,\ L_n<L_{n+1}\ 。$$

證明：由前節公式①知，證明 $A_n<A_{n+1}$ 等同於證明

$$n\sin\frac{2\pi}{n}<(n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}$$

爲了證明上式，我們用定理 1.2，其中取 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=\alpha_3=\ldots$ $=\alpha_{n+1}=\frac{\pi}{n}$，得

$$\sin 0+n\sin\frac{2\pi}{n}<(n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}\ 。$$

類似地，證明 $L_n<L_{n+1}$ 等同於證明

$$n\sin\frac{\pi}{n}<(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}$$

同樣地，利用定理 1.2，其中取 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{n}$，可証得上式。 #

定理 5.3：設 A_n' 與 L_n' 分別表示一外接於單位圓的正 n 邊形的面積與周長，那麼

$$A_n' > A_{n+1}' \ ， \ L_n' > L_{n+1}' 。$$

証明：由前節公式②，可看出証明上面兩式等同於証明

$$n\tan\frac{\pi}{n} > (n+1)\tan\frac{\pi}{n+1}$$

而這已經在定理 5.1 中証明過了。

6、內、外接於圓的多邊形

定理 6.1：在所有內接於一圓的三角形中，正(等邊)三角形具有最大面積與最大周長。

証明：不失一般性，我們可假設所接的圓爲單位圓，設 T 表示一內接於單位圓的非等邊三角形。

(1) 圓心在 T 的內部或在 T 的邊上。

若 T 的三邊所對圓心角分別爲 α, β, γ，則 $\alpha + \beta + \gamma = 360°$，不難算出 T 的面積與周長分別是

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \ ， \ 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

由定理 1.2 可得

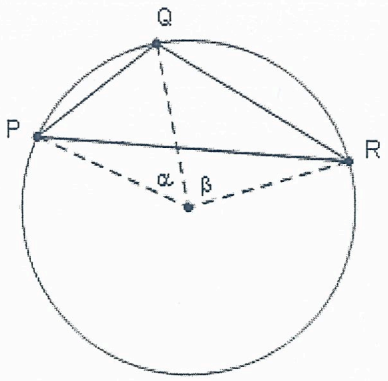
$$\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \le \frac{3}{2}\sin 120° = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \le 6\sin 60° = 3\sqrt{3}$$

且這些式子達到最大值 $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$。

所以等邊三角形具有最大面積與最大周長。

(2) 圓心在 T 的外面



設 T 的兩較短邊所對圓心角分別爲 α 與 β，那麼最大邊所對圓心角爲 $\alpha+\beta$，如上圖所示，所以 T 的面積是

$$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta-\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$
$$<\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta$$
$$\le \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\text{(定理1.1)}$$
$$<\sin 90^\circ=1$$

所以 T 的面積小於正三角形面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

接下來，T 的周長是

$$2\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\le 4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\text{(定理1.1)}$$
$$<4\sin 45^\circ+2\sin 90^\circ=2\sqrt{2}+2$$

因此 T 的周長小於正三角形周長 $3\sqrt{3}$。 #

定理 6.2：在所有內接於一圓 n 邊形中，正 n 邊形具有最大面積與最大周長。

顯然，定理 6.2 包含了定理 6.1 的內容，但爲什麼分成兩個定理來敘述呢？因爲定理 6.1 的証明中的第二種情形(圓心在 T 外面) 的証法與 $n\ge 4$ 的第二種情形的証法不同，$n\ge 4$ 的情形較簡單，但不適用於 n=3 的情形。

証明：同樣地，可設所接的圓爲單位圓，設 P 表示一內接於單位圓的非正 n 邊形。

(1) 圓心在 P 的內部或在 P 的邊上

設 P 的各邊所對的圓心角分別爲 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，所以

$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=360^\circ$，因爲 P 非正 n 邊形，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 不全相等，P 的面積是

$$\frac{1}{2}\left(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n\right)$$

$$<\frac{n}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}=\frac{n}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}\text{(定理1.2)}$$

由第 4 節中的公式①知，$\frac{n}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}$ 是內接於單位圓的正 n 邊形的面積，所以內接正 n 邊形具有最大面積，另外 P 的周長是

$$2\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}+\ldots+\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

$$<2n\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{2n}=2n\sin\frac{180^\circ}{n}\text{(內接正}n\text{邊形的周長)}$$

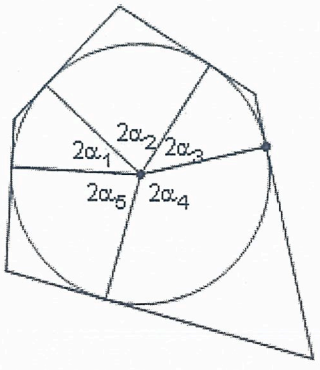
所以內接正 n 邊形具有最大周長。

(2) 圓心在 P 的外面

在此我們設 $n\geq 4$，因爲定理 6.1 已証明了 n=3，由定理 5.2 與第 4 節中的公式①知，內接於單位圓的正 n 邊形的面積與周長分別大於或等於 2 與 $4\sqrt{2}$，其中 2 與 $4\sqrt{2}$ 分別是內接於單位圓的正方形的面積與周長，又 P 完全落在一半圓內，所以 P 的面積與周長分別小於半圓的面積 $\frac{\pi}{2}$ 與周長 $2+\pi$，而 $2>\frac{\pi}{2}$，$4\sqrt{2}>2+\pi$，因此得証。 #

定理 6.3：在所有外接於一圓的 n 邊形中，正 n 邊形具有最小面積與最小周長，但具有最大等周商。

証明： 同樣地，可設所接圓爲單位圓，設 P 表示一外接於單位圓的非正 n 邊形，P 的邊與圓相切於 n 個點，如下圖所示(n=5 的情形)。



畫連接圓心與這些切點的線段，得 n 個圓心角，設這些圓心角角度分別爲 $2\alpha_1, 2\alpha_2, ..., 2\alpha_n$ ，那麼 $2\alpha_j < 180^\circ (j = 1, 2, ...n)$

所以 $\alpha_j < 90^\circ$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 180^\circ$ 。

不難算出 P 的面積 A 與周長 L 是

$$A = \tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + ... + \tan\alpha_n \quad , \quad L=2A$$

因爲 P 不是正 n 邊形，所以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 不全相等，

因此由定理 3.1(2)知

$$A = \tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + ... + \tan\alpha_n$$

$$> n\tan\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n} = n\tan\frac{180^\circ}{n}$$

而由第 4 節知 $n\tan\frac{180^\circ}{n}$ 是外接於單位圓的正 n 邊形的面積，所以外接圓的正 n 邊形具有最小面積。另外，由於所有外接於單位圓的 n 邊形都滿足 $L=2A$，所以外接正 n 邊形具有最小周長。

最後，因爲 $L=2A$，因此外接於單位圓的 n 邊形的等周商爲

$$\frac{4\pi A}{L^2} = \frac{4\pi A}{(2A)^2} = \frac{\pi}{A}$$

所以具有最小面積的外接正 n 邊形有最大等周商。 #