九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時（13:30～15:30）。

(2) 配分：每題皆爲 7 分。

(3) 不可使用計算器。

一、試求所有使得 $\sqrt{\frac{2006}{x+y}}+\sqrt{\frac{2006}{x+z}}+\sqrt{\frac{2006}{y+z}}$ 為整數的正整數組 (x, y, z)。

二、設 $p(x)$ 為整係數多項式。給定整數 a,b，令

$$a_1 = p(a),\ a_2 = p(a_1),\cdots,\ a_{2006} = p(a_{2005})\ ;$$

$$b_1 = p(b),\ b_2 = p(b_1),\cdots,\ b_{2006} = p(b_{2005})\ 。$$

已知 $a_{2006} = a$，$b_{2006} = b$，但 $a_{1003} \neq a$，$b_{1003} \neq b$。

試證明：若 $a < b$，則 $a_{1003} > b_{1003}$。

三、設 ΔABC 為銳角三角形，分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 三邊上各取 D、

E、F 三點。試證明存在唯一的一組 D、E、F 使得 $\Delta AEF \sim \Delta ABC$、$\Delta BDF \sim \Delta BAC$、$\Delta CDE \sim \Delta CAB$，並找出這樣的 D、E、F 三點的位置。

九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）

注意事項：

(1)**時間分配**：2 小時 (16:00～18:00)。

(2)**配分**：**每題皆為** 7 **分。**

(3)**不可使用計算器。**

一、設 ΔABC 中 $\angle A = 60°$，$\angle B = 45°$，圓 O 為 ΔABC 的外接圓，P 為劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上異於 B、C 的動點，連接 AP 線段與三角形的 BC 邊交於點 Q。試求 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}$ 的最小值。

二、從 $1, 2, 3, 4, \cdots, 2n-1, 2n$ 這 $2n$ 個正整數中，隨意選取 n 個數，並將他們從大至小排列為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，即

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n \text{。}$$

再將剩下的 n 個數從小至大排列為 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，即

$$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n \text{。}$$

試求 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$ 之所有可能的值。

三、設 a, b, c 都是正實數，試證：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 9bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{10}} \text{。}$$