教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）　　編號：＿＿＿＿＿＿

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。

2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 (13 分) 一隻螞蟻正保持在一個正四面體的某一個頂點 A 之上，此時它隨機選擇一個臨近的頂點(每個臨近的頂點被選中的機率皆為 1/3)，並且在一分鐘之後走到那裡；接著它又隨機選擇一個臨近的頂點，並在一分鐘之後走到那裡。假設這隻螞蟻一直以上述的方式在各個頂點之間走動，那麼在 60 分鐘之後，它的位置恰好在一開始起步之頂點 A 的機率是多少呢？

二、 (12 分) 設 $x \neq \pm 1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$。解下列有理方程式

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\dfrac{2x}{1-x^2} + \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}}{1 - \dfrac{2x}{1-x^2} \cdot \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}}.$$

三、 (12 分) 假設三角形三頂點為 A_1, A_2, A_3，其對邊分別為 S_1, S_2, S_3 且對邊長度分別為 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3。設 P 為三角形內部任意一點，P 到 S_1, S_2, S_3 的距離分別為 h_1, h_2, h_3。

求證：$\dfrac{\ell_1}{h_1} + \dfrac{\ell_2}{h_2} + \dfrac{\ell_3}{h_3} \geq 6\sqrt{3}$.

四、 (12 分) 設 p 為奇質數。證明：$2^p + 1 - \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j}$ 是 p^2 的倍數。

教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）　　編號：_____

（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題，滿分為二十一分。

2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 (4 分) 設 A 代表球心在原點，半徑為 1 的球面。令 Q 的座標為 $(1,2,0)$，N 的座標為 $(0,0,1)$，S 的座標為 $(0,0,-1)$。設 $\overline{NQ}$ 線段交球面 A 於 P 點，求 $\overline{PS}$ 線段與 xy 平面的交點座標。

二、(4 分) 設函數 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足下列三個條件：

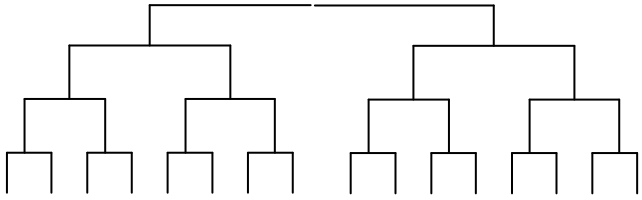
(1) $f(x,x)=x$

(2) $f(x,y)=f(y,x)$

(3) $f(x,y)\cdot(x+y)=f(x,x+y)\cdot y$

求 $f(16,54)$ 之值。（其中 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y \text{ 為自然數}\}$ 且 $\mathbb{R}$ 代表所有實數所成的集合）

三、(4 分) 下圖是網球比賽的賽程，總共有 16 位選手參加。競賽採用單淘汰制，一開始主辦單位將 16 位選手隨機地分配到 A ~ P 的位置，選手們兩兩配對比賽，獲勝者晉級下一回合，輸者則被淘汰，最後經過四個回合比賽產生總冠軍。如果今日有甲和乙兩位雙胞胎參加比賽，請問他們在整個賽程當中，彼此可能會遭遇對打的機率是多少？（假設這 16 位選手的實力相當，兩兩配對比賽時，獲勝或者失敗的機率都是 1/2。）



四、定義一數列$\{x_n\}$為$x_1=\frac{1}{5}$且$x_{k+1}-x_k=x_k^2$，$k\geq 1$。求$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2006}+1}$的整數部份。 (4 分)

五、 設X代表一個含有 2006 個元素的集合且已知函數$f:X\to X$滿足$f^{101}(a)=a$,對所有$a\in X$都成立（f^n表示函數f自我合成n次，如$f^2(a)=f(f(a))$）。令 N 表示集合$\{a\in X\mid f(a)=a\}$的元素個數且已知$N\leq 100$，試求 N 的值。 (5 分)

教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

令 a_n = 第 n 分鐘時，螞蟻回到頂點 A 的機率，那麼第 n 分鐘時，螞蟻不在頂點 A 的機率即為 $(1-a_n)$。

如果螞蟻在第(n-1)分鐘時不在 A 點，那麼有 1/3 的機率，它會在一分鐘之後(也就是在第 n 分鐘時)回到 A 點，所以 $a_n=(1/3)(1-a_{n-1})$。

（從另一方面來說，第 n 分鐘時，螞蟻不在頂點 A 的情形可能有兩種：其一，在第(n-1)分鐘時它已經到達 A 點，所以下一分鐘(也就是在第 n 分鐘時)它勢必要離開 A 點。其二，在第(n-1)分鐘時它不在 A 點，然後有 2/3 的機率，在下一分鐘它也不會到達 A 點，所以 $1-a_n=a_{n-1}+(2/3)(1-a_{n-1})$，同樣可以得到 $a_n=(1/3)(1-a_{n-1})$。）

由 $a_0=1$ 得到 $a_n=\frac{1}{4}[1+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}]$。將 $n=60$ 代入上式，得到機率 $\frac{1}{4}[1+\frac{1}{3^{59}}]$。

這個值非常接近(但不等於) 一般人所猜測的 1/4。

二、【解】

$x\neq\pm1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

設 $x=\tan A$，則本有理式可變為

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\tan 2A+\tan 3A}{1=\tan 2A\tan 3A}$$

也就是 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 5A$

$\therefore\quad 5A=30^\circ+360^\circ k$

$A=\frac{\pi(1+12k)}{30},\ k=0,1,2,3,4.$

三、【證明】

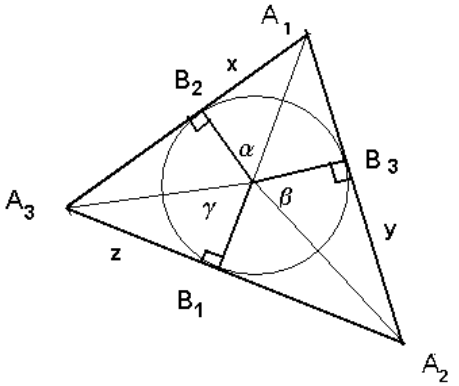
由 Cauchy-Schwartz 不等式：

$$\left(\frac{\ell_1}{h_1}+\frac{\ell_2}{h_2}+\frac{\ell_3}{h_3}\right)\left(h_1\ell_1+h_2\ell_2+h_3\ell_3\right)\geq\left(\ell_1+\ell_2+\ell_3\right)^2$$

設 a 為三角形 $A_1A_2A_3$ 之面積

ℓ 為其周長；$\ell=\ell_1+\ell_2+\ell_3$，則

$2a=\ell_1h_1+\ell_2h_2+\ell_3h_3$



$$\therefore\quad\frac{\ell_1}{h_1}+\frac{\ell_2}{h_2}+\frac{\ell_3}{h_3}\geq\frac{\ell^2}{2a}$$

等式成立之條件為

$$\frac{\sqrt{\frac{\ell_1}{h_1}}}{\sqrt{h_1\ell_1}}=\frac{\sqrt{\frac{\ell_2}{h_2}}}{\sqrt{h_2\ell_2}}=\frac{\sqrt{\frac{\ell_3}{h_3}}}{\sqrt{h_3\ell_3}}$$

$\therefore\quad h_1=h_2=h_3$，也就是，當 P 為內心時最小。

設 $r=h_1=h_2=h_3$ 為內切圓半徑。我們有

$$\frac{\ell}{r}=\frac{\ell^2}{2a}$$

注意這個數量是”dimensionless”，也就是，假設二個相似三角形周長與面積分別為 $(\ell_1,a_1),(\ell_2,a_2)$，則 $\frac{\ell_1^2}{2a_1}=\frac{\ell_2^2}{2a_2}$。因此，這個量只與三角形的形態有關，而與大小無關。所以，為了決定其最小值，我們可以固定 $r=1$，找出內切圓半徑為 1 的三角形中，周長 ℓ 為最小者。

假設三角形 $A_1A_2A_3$ 之內接圓圓心為 P，半徑為 1。P 至 S_1,S_2,S_3 的垂足分別為 B_1,B_2,B_3，設 $\alpha=\angle A_1PB_2$，$\beta=\angle A_2PB_3$，$\gamma=\angle A_3PB_1$，則 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$。令 $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$，則 $x+y+z=\frac{\ell}{2}$，而且由 $\tan\theta$ 之和角公式得

$$x+y+z=xyz,\ (x,y,z>0)$$

設 $x+y+z=\lambda$ 由算幾不等式，

$$\lambda\leq\left(\frac{\lambda}{3}\right)^3$$

因而 $\lambda\geq3\sqrt{3}$。當 $x=y=z$ 時，等式成立，所以 ℓ 之最小值為 $2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$，而 $A_1A_2A_3$ 為正三角形。

四、【證明】

注意到在 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(1+x)^{p+j}$ 中的 x^p 之係數是 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}$,而

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(1+x)^{p+j}=\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(1+x)^{j}\right)(1+x)^{p}$$

$$=\left[(1+x)+1\right]^{p}(1+x)^{p}$$

$$=(2+x)^{p}(1+x)^{p}$$

所以 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p}{p-k}2^{k}$

但 $p\left|\binom{p}{k}(k=1,2,\cdots,p-1)\right.$，因此

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}\equiv\binom{p}{0}\binom{p}{p}2^{0}+\binom{p}{p}\binom{p}{0}2^{p}=1+2^{p}\pmod{p^{2}}$$

教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

因 ΔOST 相似 ΔNOQ ，有 $\frac{OT}{ON}=\frac{OS}{OQ}$.

$$\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

即 $\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

所以 $(x',y')=\overline{OT}\frac{\overrightarrow{OQ}}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}=\frac{(x,y)}{x^2+y^2}=\frac{(1,2,0)}{5}$.

二、【解】

By (3), $x+y=z$

$zf(x,z-x)=(z-x)f(x,z)$

$\therefore\quad f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x)$

$f(16,54)=\frac{54}{38}f(16,38)$

$=\frac{54}{38}\cdot\frac{38}{22}f(16,22)$

$=\frac{54}{22}\cdot\frac{22}{6}f(16,6)$

$=9f(6,16)=9\cdot\frac{16}{10}f(6,10)$

$=9\cdot\frac{16}{10}\cdot\frac{10}{4}f(6,4)$

$=9\cdot4\cdot f(4,6)$

$=9\cdot4\cdot\frac{6}{2}f(4,2)$

$=9\cdot12f(2,4)=9\cdot12\cdot\frac{4}{2}f(2,2)$

$=108\cdot2\cdot2=432$

三、【解】

如果一開始雙胞胎甲被排到 A 位置，那麼整個賽程當中，雙胞胎乙會和他遭遇的情形有四種可能：

一、比賽開始乙在 B 位置(機率 1/15)，兩人立即遭遇(機率 1)。

二、比賽開始乙在 C 或 D 位置(機率 2/15)，兩人都要贏得第一回合勝利，才能在第二回合碰面(機率 1/2*1/2=1/4) 。

三、比賽開始乙在 E、F、G 或 H 位置(機率 4/15)，兩人都要贏得前兩回合的勝利，才能在第三回合碰面(機率 1/4*1/4=1/16) 。

四、比賽開始乙在 I~P 位置(機率 8/15)，兩人都要贏得前三回合的的勝利，才能在第四回合碰面(機率 1/8*1/8=1/64) 。

所以在整個賽程當中，兩位雙胞胎會遭遇對打的機率為：

$$\frac{1}{15}\times 1+\frac{2}{15}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{15}\times\frac{1}{16}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{64}=\frac{1}{8}$$

四、【解】

$$x_{k+1}=x_k^2+x_k \Rightarrow \frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$$

$$\therefore \ \frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2006}+1}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{2006}}-\frac{1}{x_{2007}}$$

$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2007}}=5-\frac{1}{x_{2007}}=4.\cdots \quad (\because x_{2007}>1)$$

五、【解】

令 $F=\{a\in X \mid f(a)=a\}$

若 $b\notin F$ 則 $\left\{f(b), f^2(b),\cdots, f^{101}(b)\right\}$ 正好有 101 個相異元素。因此 $X-F$ 的元數個數為 101 的倍數或 2006 和 N 除以 101 同餘，所以 $N=87$。