九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設實數 $\lambda \geq 1$，且實係數多項式函數 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 滿足：

$$\lambda a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k=0 \text{。}$$

試證：$f(x)=0$ 在 $0\leq x\leq 1$ 的範圍內至少有一實根。

試題來源	■ 自　編　□ 改編於：		
類　別	■ 代　數　□ 數　論　□ 組　合　□ 幾　何		
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編　號	筆試(一)第一題

解答：

(1) 當 $\lambda=1$ 時，$f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$，即 $f(x)=0$ 有一實根 $x=1$。

(2) 當 $\lambda>1$ 時，由於 $\sum_{k=0}^{n} a_k=(1-\lambda)a_0$，我們有

(i) $a_0=0$ 時，$f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$，即 $f(x)=0$ 有一實根 $x=1$。

(ii) $a_0\neq 0$ 時，$\sum_{k=0}^{n} a_k$ 與 a_0 為異號的兩實數，而 $f(0)=a_0$ 且 $f(1)=\sum_{k=0}^{n} a_k$，故 $f(0)\cdot f(1)<0$。因此，由多項式函數的堪根定理知，$f(x)=0$ 在 $0<x<1$ 的範圍內至少有一實根。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 a,b,c 為正實數，試證：$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\ge\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ 。

試題來源	□ 自　編　■ 改編於：Diamonds in Math. Inequalities		
類　別	■ 代　數　□ 數　論　□ 組　合　□ 幾　何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	筆試(一)第二題

解答： 利用算幾不等式，$\frac{a^3}{b^2}+a\ge 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}\cdot a}=\frac{2a^2}{b}$，同理，$\frac{b^3}{c^2}+b\ge\frac{2b^2}{c}$，$\frac{c^3}{a^2}+c\ge\frac{2c^2}{a}$。

將這三式相加，可得

$$(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})+(a+b+c)\ge 2(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\text{。}\qquad(1)$$

另一方面，$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a$，同理，$\frac{b^2}{c}+c\ge 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$。再將三式相加得

$(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})+(a+b+c)\ge 2(a+b+c)$，因此，

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c\text{。}\qquad(2)$$

合併(1)(2)可得

$$(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})+(a+b+c)\ge 2(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\ge(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})+(a+b+c)\text{。}$$

於是可得：$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$。　(3)

其次，$\frac{a^4}{b^3}+\frac{a^2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{a^4}{b^3}\cdot\frac{a^2}{b}}=\frac{2a^3}{b^2}$，同理，$\frac{b^4}{c^3}+\frac{b^2}{c}\ge\frac{2b^3}{c^2}$，$\frac{c^4}{a^3}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{2c^3}{a^2}$。將這三式相加，可得 $(\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3})+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\ge 2(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})$　(4)

合併(3)(4)可得

$$(\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3})+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\ge 2(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})\ge(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\text{。}$$

於是可得：$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\ge\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}$。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 P 為 ΔABC 內部一點，且 P 到三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的垂足分別為 X,Y,Z ，並設 ΔAPB 及 ΔAPC 的內心分別為 Q,R ，且

$$\angle APB-\angle C=\angle CPA-\angle B$$ 。

（1） 試證： $\angle YXZ=\angle BPC-\angle A$ ；

（2） 試證： AP,BQ,CR 三線共點。

試題來源	☐ 自 編 ■ 改編於：1996 IMO Problem Shortlist		
類 別	☐ 代 數 ☐ 數 論 ☐ 組 合 ■ 幾 何		
難易度	■ 難 ☐ 中等 ☐ 易	**編 號**	筆試(一)第三題

解答：(1) 因 B,X,P,Z 四點共圓，得 $\angle ABP=\angle ZXP$ ；又由 C,Y,P,X 四點共圓，得 $\angle ACP=\angle PXY$ 。因此，$\angle A=180°-(\angle B+\angle C)=180°-(\angle ABP+\angle PBC+\angle ACP+\angle PCB)$

$=180°-(\angle ZXP+\angle PBC+\angle PXY+\angle PCB)=(180°-\angle PBC+\angle PCB)-(\angle ZXP+\angle PXY)$

$=\angle BPC-\angle YXZ$ ；故 $\angle YXZ=\angle BPC-\angle A$ 。

(2)令直線 BQ 與 CR 分別交 AP 於 V,W 。欲證 V,W 兩點重合，僅需證明 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$ ，

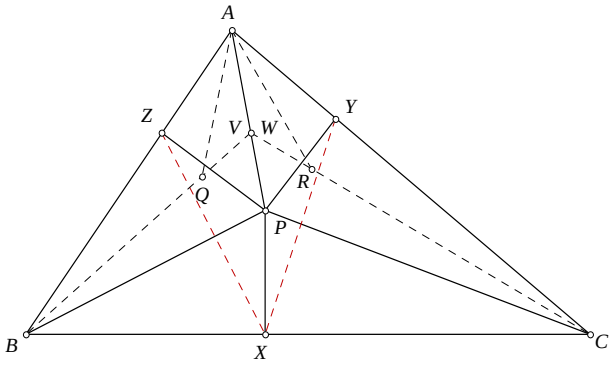
（因為此時利用角平分線比例性質，可得 $\frac{\overline{AV}}{\overline{VP}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AW}}{\overline{WP}}$ ，於是， $V=W$ 。）

由(1)得 $\angle YXZ=\angle BPC-\angle A$ ，同理， $\angle XZY=\angle APB-\angle C$ ， $\angle ZYX=\angle CPA-\angle B$ 。

因此， $\angle XZY=\angle ZYX$ ，而有 $\overline{XY}=\overline{XZ}$ 。又利用正弦定理，可知

$\overline{PC}=\frac{\overline{PC}}{\sin\angle PXC}=\frac{\overline{XC}}{\sin\angle XPC}=\frac{\overline{XC}}{\sin\angle XYC}=\frac{\overline{XY}}{\sin C}$ ；同理， $\overline{PB}=\frac{\overline{XZ}}{\sin B}$ 。故得

$\overline{AB}\cdot\overline{CP}/\overline{AC}\cdot\overline{BP}=\overline{AB}\cdot\frac{\overline{XY}}{\sin C}/\overline{AC}\cdot\frac{\overline{XZ}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}/\frac{\overline{AC}}{\sin B}=1$ ，即 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$ 。



九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

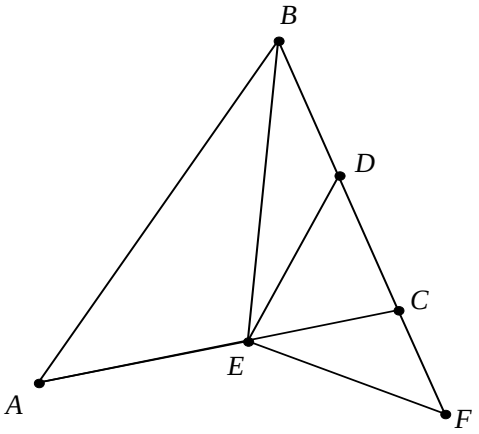
題目： 在 ΔABC 中，設 D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點，$\overline{AB} > \overline{BD}$，且 $\angle ABC$ 的平分線與 $\overline{AC}$ 交於 E。試證：$\overline{AE} = \overline{DE}$ 的充要條件為 A, B, D, E 四點共圓。

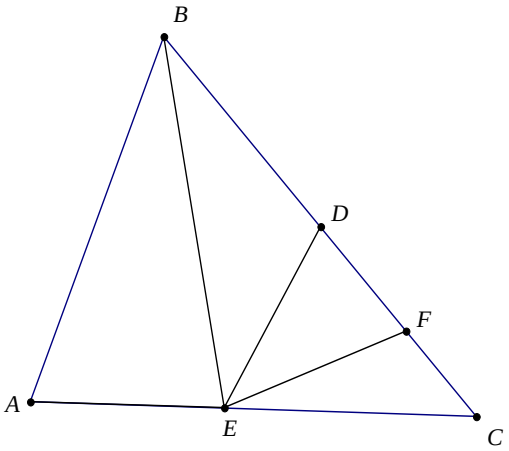
試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代　數　□ 數　論　□ 組　合　■ 幾　何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	筆試(二)第一題

解答：

(1) 設 $\overline{AE} = \overline{DE}$

在射線 $\overrightarrow{BC}$ 上取一點 F 使 $\overline{BF} = \overline{BA}$，則 $\Delta ABE \cong \Delta FBE$；於是，$\overline{AE} = \overline{EF}$。因此，$\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{EF}$。於是，$\angle EDC = \angle EFB = \angle BAC$；由此可得 $\angle BDE + \angle BAC = (180° - \angle EDC) + \angle BAC = 180°$，故 A, B, D, E 四點共圓。





(2) 設 A, B, D, E 四點共圓

由 $\angle A = \angle EDC$, $\angle ABD = \angle DEC$，可得 $\Delta CAB \sim \Delta CDE$，因此，$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$，即 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$。又因 $\overline{BE}$ 為 $\angle ABC$ 的平分線，可得 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$；由此可知 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EC}}$，故 $\overline{AE} = \overline{DE}$。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：有一非常大的正整數 n，它除了不可被 1 至 250 中某兩連續正整數 $k, k+1$ 整除外，都可被 1 至 250 中其他的整數整除，試求 k 之值。

試題來源	☐ 自　編　　■ 改編於：華盛頓大學挑戰題		
類　別	☐ 代 數　■ 數 論　☐ 組 合　☐ 幾 何		
難易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	**編 號**	筆試(二)第二題

解答：

(1)首先，證明 $k>125$：

當 $k\le 125$ 時，因為 n 不可被 k 整除，得 n 也不可被 $2k$ 整除，但 $1<2k\le 250$，此與已知條件矛盾。

(2) 證明 $k, k+1$ 必為質數或質數之次方：

假設 k 可分解成 $k=rs$，其中 r, s 互質。因為 k 不整除 n，則 r 不整除 n 或 s 不整除 n，此與已知條件矛盾。故 k 必為質數或質數之次方。同理可證，$k+1$ 亦為質數或質數之次方。

(3)另一方面，$k, k+1$ 中必有一為偶數，所以 $k, k+1$ 中必有一為 2 的次方。但是介於 125 至 250 之間之 2 的次方為 $2^7=128$，故 128 為一不可整除 n 之數。另一數可能為 127 或 129，又因 $129=3\times 43$，而 127 為一質數，所以 127 為另一不可整除 n 之數。故兩數為 127,128，即 $k=127$。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：在直角坐標平面上，給定相異兩點 A,B ，試證：平面上可以找到由有限個點所組成的集合 Ω ，同時滿足以下兩條件：

（1） Ω 必須包含 A,B 兩點，

（2）對 Ω 中每一個點 P ，在 Ω 中至少還有2008個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

試題來源	□ 自　編　　■ 改編於：1996 Crux Math.		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編 號**	筆試(二)第三題

解答：首先，利用數學歸納法可以證明：對任意的正整數 n ，平面上都存在一有限集合 Ω_n 滿足以下兩條件：

（1） Ω_n 至少包含 $n+1$ 個點，

（2） 對 Ω_n 中每一個點 P ，在 Ω_n 中至少還有 n 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

當 $n=1$ 時，可以取 Ω_1 為一單位長的兩端點。

當 $n=2$ 時，可以取 Ω_2 為邊長1的正三角形的三個頂點。

假設命題對 $n=k$ 時成立，即存在一有限集合 Ω_k 滿足兩條件。取平面上一單位向量 $\vec{u}$ 使 $\vec{u}$ 與 Ω_k 中任意兩點決定的向量都不平行，並將 Ω_k 的點依 $\vec{u}$ 的方向平移一單位，可得另一組與 Ω_k 個數相同的點集合 S ，則 $\Omega_k\cap S=\varnothing$ 。於是，若取 $\Omega_{k+1}=\Omega_k\cup S$ ，則 Ω_{k+1} 滿足兩條件：

（1） Ω_{k+1} 至少含有 $2k+2$ 個點，其中 $2k+2\geq(k+1)+1$

（2） 對 Ω_{k+1} 中每一個點 P ，在 Ω_{k+1} 中至少還有 $k+1$ 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

特別的，有限集合 Ω_{2008} 滿足以下條件：

對 Ω_{2008} 中每一個點 P ，在 Ω_{2008} 中至少還有2008個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

現在，若給定相異兩點 A,B ，則任取 Ω_{2008} 中一點 P ，並將 Ω_{2008} 中的每一個點，分別依 $\overline{PA}$ 及 $\overline{PB}$ 的方向平移，設得到的點集分別為 Ω_A 及 Ω_B ；若取 $\Omega=\Omega_A\cup\Omega_B$ ，則 Ω 包含 A,B 兩點，且對 Ω 中每一個點 P ，在 Ω 中至少還有2008個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 m,n 都是大於 1 的正整數，試證：$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$。

試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	■ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(一)第一題

解答： 令 $\sqrt[n]{m}=1+a,\sqrt[m]{n}=1+b$ ，其中 $a,b>0$，則

$$m=(1+a)^n>1+na\ ，$$
$$n=(1+b)^m>1+mb\ 。$$

於是，

$$a<\frac{m-1}{n}\quad 且\quad b<\frac{n-1}{m}\ 。$$

因此，

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}>\frac{1}{1+\frac{m-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n-1}{m}}=\frac{n+m}{n+m-1}>1\ 。$$

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 試求最大的正整數 n，使得對於任意質數 p，其中 $2 \le p < n$，$n+6p$ 也是質數。

試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代　數　　■ 數　論　　□ 組　合　　□ 幾　何		
難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(一)第二題

解答： 首先，可以觀察出正整數 n 必為質數；否則，取質數 p 為 n 的一個質因數時，$n+6p$ 就不是質數，矛盾！

其次，檢驗 $n=11$ 滿足所求條件：當 $p=2,3,5,7$ 時，$n+6p$ 都是質數。

$$11+6\cdot 2=23$$
$$11+6\cdot 3=29$$
$$11+6\cdot 5=41$$
$$11+6\cdot 7=53$$

當 $n=13$ 時：取 $p=2$，則 $n+6p=25$ 不是質數。
當 $n=17$ 時：取 $p=3$，則 $n+6p=35$ 不是質數。
當 $n=19$ 時：取 $p=11$，則 $n+6p=85$ 不是質數。

以下證明：當 $n \ge 20$ 時，都可以選取適當的質數 p，使得 $n+6p$ 不是質數。

由於

$6\cdot 2 \equiv 2 \pmod 5$　　$6\cdot 3 \equiv 3 \pmod 5$　　$6\cdot 5 \equiv 0 \pmod 5$　　$6\cdot 7 \equiv 2 \pmod 5$

$6\cdot 11 \equiv 1 \pmod 5$　　$6\cdot 13 \equiv 3 \pmod 5$　　$6\cdot 17 \equiv 2 \pmod 5$　　$6\cdot 19 \equiv 4 \pmod 5$

於是，$6p$ 除以 5 的餘數可以是 $0,1,2,3,4$，因此，當 $n \ge 20$ 時，都可以選取適當的質數 p，使得 $n+6p$ 是 5 的倍數，當然不是質數。

因此，所求最大的正整數 $n=11$。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 一童子軍團隊在一個三角形 ABC 的營地中某處 O，垂直立起團隊的旗杆，並由旗杆頂端 P 分別往 ΔABC 三邊最短距離處 D, E, F 各拉一條繩子，以固定旗杆，如圖所示。已知 $\overline{PD}, \overline{PE}, \overline{PF}$ 成等比數列，而 $\angle PDO, \angle PEO, \angle PFO$ 成等差數列，且都是銳角。若童子軍隊長猜測 $\angle PDO = \angle PEO = \angle PFO$ 一定成立，試問他的猜測是否正確？

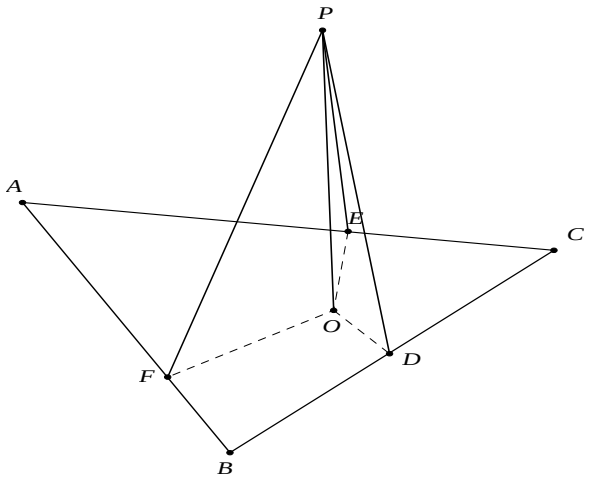
試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(一)第三題

解答： 令 $\angle PDO = \alpha_1$，$\angle PEO = \alpha_2$，$\angle PFO = \alpha_3$，且 $\overline{PD} = h_1$，$\overline{PE} = h_2$，$\overline{PF} = h_3$。

由題意可知 $\overline{OP} = h_1 \sin\alpha_1 = h_2 \sin\alpha_2 = h_3 \sin\alpha_3$。又已知 $h_2^2 = h_1 h_3$，$\alpha_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$，則可得 $\sin\alpha_1 \sin\alpha_3 = \sin^2\left(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}\right)$。利用倍角公式，可將上式化成

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_3) - \cos(\alpha_1 + \alpha_3)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_3)\right],$$

整理後得到 $\cos(\alpha_1 - \alpha_3) = 1$。因 $0 < \alpha_1 < \pi/2$，$0 < \alpha_3 < \pi/2 \Rightarrow -\pi/2 < \alpha_1 - \alpha_3 < \pi/2$，故有 $\alpha_1 - \alpha_3 = 0$。據此可得 $\alpha_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} = \alpha_1$，故 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$，即童軍隊長的猜測正確。



九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 a 為實數，且方程式 $x^4+4x^3-6x^2+ax+20=0$ 的四個根之中，有兩根的乘積等於 -5，試求 a 的值，及其對應的所有根。

試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	■ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何		
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	**編 號**	獨立研究(二)第一題

解答： 令 $f(x)=x^4+4x^3-6x^2+ax+20=0$ 的四個根為 p,q,r,s，其中 $rs=-5$，則由根與係數關係，得 $pqrs=20$，故得 $pq=-4$。因此，$f(x)$ 可以表成

$$f(x)=x^4+4x^3-6x^2+ax+20=(x^2+ux-5)(x^2+vx-4)\text{。}$$

展開比較係數，得

$$u+v=4,\quad uv-9=-6,\quad -4u-5v=a\text{。}$$

解聯立方程式 $\begin{cases}u+v=4\\uv=3\end{cases}$，可得 $(u,v)=(3,1)$ 或 $(u,v)=(1,3)$。

(1) 當 $(u,v)=(3,1)$ 時，$a=-4u-5v=-17$，此時，$f(x)=0$ 的四個根為

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2},\quad \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\text{。}$$

(2) 當 $(u,v)=(1,3)$ 時，$a=-4u-5v=-19$，此時，$f(x)=0$ 的四個根為

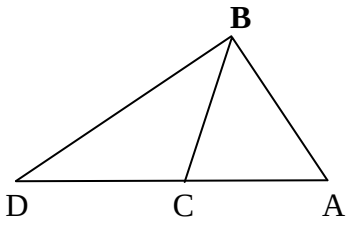
$$x=-4,\quad 1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\text{。}$$

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 ΔABC 中，$\angle C = 2\angle B$。試證：$27\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC} > 4\overline{BC}^3$。

試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代　數　　□ 數　論　　□ 組　合　　■ 幾　何		
難易度	□ 難　　■ 中等　　□ 易	**編　號**	獨立研究(二)第二題

解答：



在射線 $\overrightarrow{AC}$ 上選取一個點 D，使得 $\overline{CD} = \overline{CB}$ 且點 A 與點 D 在直線 BC 異側。因為 ΔCBD 是等腰三角形，而且 $\angle C = 2\angle B$，可得 $\angle CDB = \angle ABC$。於是，$\Delta ACB \sim \Delta ABD$。由此可得 $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$。於是，得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}(\overline{AC} + \overline{CD}) = \overline{AC}(\overline{AC} + \overline{BC})。$$

令 $\overline{AC} = u^2$ 及 $\overline{AC} + \overline{BC} = v^2$，其中，$u$ 與 v 為正數，則可得 $\overline{AB} = uv$ 及 $\overline{BC} = v^2 - u^2$。再由 $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$ 可得 $u > v - u$ 或 $u/v > 1/2$。於是，得

$$\frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}^3} = \frac{u^4 v^2}{(v^2 - u^2)^3} = \frac{(u/v)^4}{(1 - u^2/v^2)^3} > \frac{(1/2)^4}{(1 - 1/4)^3} = \frac{4}{27}。$$

第一段另證：$\angle C = 2\angle B \Leftrightarrow \cos C = \cos 2B \,(= 2\cos^2 B - 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2}{2c^2 a^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow ac^2(a^2 + b^2 - c^2) = b(c^2 + a^2 - b^2)^2 - 2a^2 bc^2$$

$$\Leftrightarrow b^5 - 2(c^2 + a^2)b^3 - ac^2 b^2 + (c^4 + a^4)b + ac^2(c^2 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + a)(b^2 + ab - c^2)(b^2 - 2ab + a^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + ab - c^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 = b(b + a)。$$

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：考慮所有可能的正整數數列 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n\rangle$，其中 $n\geq 100$ 且數列 A 中任意連續若干項之和都不等於 100，令 $f(A)$ 表示數列 A 中各項的最大數，例如：若 $A=\langle 97, 98, 1, 2, 5, 96, 7, 7, 7, \cdots, 7\rangle$，則 $f(A)=98$。試求 $f(A)$ 的最小值。

試題來源	□ 自　編　　■ 改編於：2004 年　中等數學 No. 1		
類　別	□ 代　數　□ 數　論　■ 組　合　□ 幾　何		
難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(二)第三題

解答: 首先證明：若數列 A 中各項都是 1 或 2，則 A 中必有連續若干項之和等於 100。

考慮 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n\rangle$ 的前 100 項，每一項 $a_j\in\{1,2\}$，令

$$S_0=0,\ S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2, \cdots,\ S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}。$$

因為 $0=S_0<S_1<S_2<\cdots<S_{100}\leq 200$，由鴿籠原理可知：這101個數除以100必有兩數同餘，故存在 $0\leq m<n\leq 100$ 使得 $S_m-S_n=100k$。由於每一項 $a_j\in\{1,2\}$，故 $k=1$ 或 $k=2$。

（1）當 $k=1$ 時，$S_n-S_m=100$，這表示 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=100$。

（2）當 $k=2$ 時，$S_n-S_m=200$，此時 $m=0, n=100$，且每一項 $a_j=2$，故

$a_1+a_2+\cdots+a_{50}=100$。

因此，由上面的結果可知：欲使數列 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n\rangle$ 中任意連續若干項之和都不等於 100，則必有一項之值大於或等於 3；故 $f(A)\geq 3$。

其次，我們可以構造一數列 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n\rangle$ 如下：

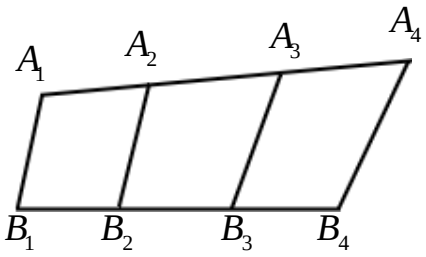
$$a_n=\begin{cases}1 & \text{當 } n=100k+1\\ 3 & \text{當 } n=100k+51\\ 2 & \text{其他}\end{cases}$$

即以 1,2,2,…,2,3,2,2,…,2 的 100 項為週期的數列；不難檢驗此數列中任意連續若干項之和都不等於 100，故所求 $f(A)$ 的最小值等於 3。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：如下圖所示，$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$，$\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}$。試證：

四邊形 $A_1B_1B_2A_2$、$A_2B_2B_3A_3$、$A_3B_3B_4A_4$ 的面積成等差數列。



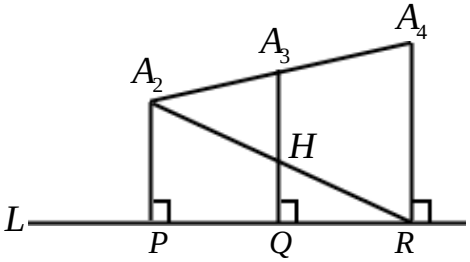
試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何		
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	**編 號**	口試第一題

解答：連接 A_2B_1, A_3B_2, A_4B_3，只要證明 $\Delta B_1A_2B_2$, $\Delta B_2A_3B_3$, $\Delta B_3A_4B_4$ 的面積成等差，同理可證 $\Delta A_1B_1A_2$, $\Delta A_2B_2A_3$, $\Delta A_3B_3A_4$ 的面積亦成等差，即可證得原題之要求。

因為 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}$，所以只要證明由 A_2, A_3, A_4 分別對 B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 所作的高成等差即可！

如下圖所示，分別由 A_2, A_3, A_4 分別對 B_1,B_2,B_3,B_4 所在的直線 L 作垂線，設垂足分別為 P,Q,R。因為 $A_2P\,//\,A_3Q\,//\,A_4R$，且 $\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$，所以 $\overline{PQ}=\overline{QR}$。

設 $\overline{A_2R}$ 交 $\overline{A_3Q}$ 於 H，則 $\overline{A_3H}=\frac{1}{2}\overline{A_4R}$, $\overline{QH}=\frac{1}{2}\overline{A_2P}$，故 $\overline{A_3Q}=\frac{1}{2}(\overline{A_4R}+\overline{A_2P})$，即 $\overline{A_2P}$, $\overline{A_3Q}$, $\overline{A_4R}$ 成等差，故得證！



九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 考慮 $1,2,3,\cdots,n$ 的任意排列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，令 $f(n)$ 表示 n 層絕對值 $\big|\big|\big|a_1|-a_2|-a_3|-\cdots|-a_n|$ 的最大值，例如：當 $n=3$ 時，$f(3)$ 表示 $\big|\big|a_1|-a_2|-a_3|$ 的最大值，其中 a_1,a_2,a_3 為 $1,2,3$ 的任意排列。試求 $f(97)$ 之值。

試題來源	□ 自　編　　■ 改編於：NSC86-2511-S-003-038		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	口試第二題

解答： 首先，證明：每一正整數 n，$f(n)\le n$。

事實上，利用不等式：$|a-b|\le\max\{a,b\}$ 對任意兩正數 a,b 都成立，可得

$$f(n)\le\max\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}=n\ 。$$

於是，$f(97)\le 97$。

另一方面，可以構造出 $1,2,3,\cdots,97$ 的一組排列，使其 97 層絕對值為 97，例如：取

$$96,95,94,93;92,91,90,89;\cdots;4,3,2,1;97\ ，$$

利用 $\big|\big|\big|(a+3)|-(a+2)|-(a+1)|-a|=0$ 對任意正數 a 恆成立，可得到它們的 97 層絕對值為 97。因此，可推得 $f(97)=97$。

至於 $f(98)$ 之值，我們可以利用：對任意整數 a,b，$|a-b|$ 與 $a+b$ 之奇偶性必相同；於是，$f(n)$ 與 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 有相同的奇偶性。特別的，

$$1+2+3+\cdots+98\equiv 1\pmod 2\ 。$$

故 $f(98)<98$，即 $f(98)\le 97$。以下可以構造出 $1,2,3,\cdots,98$ 的一組排列，使其 98 層絕對值為 97，例如：取 $97,96,95,94;93,92,91,90;\cdots;5,4,3,2;1;98$。因此，可以得知 $f(98)=97$。